Két pont távolsága (IV/1)

$$A = (2, 1, 3) \quad B = (4, 6, -1) \tag{1}$$

$$D(A, B) = \sqrt{(2-4)^2 + (1-6)^2 + (1-3))^2} = \sqrt{4 + 25 + 16} = 3\sqrt{5} \tag{2}$$

Pont egyenes távolsága (IV/2)

$P = (1, 12, 3) \in e$. $A = (-1, 2, 1)$. Legyen $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{p} = (-2, -10, -2)$. $D(e, A) = |\mathbf{v}_\perp|$, ahol $\mathbf{v}_\perp$ a $\mathbf{v}$ e-re merőleges komponense. $|\mathbf{v}_\perp| = |\mathbf{v}| \sin\phi$, ahol $\sin\phi$ e és $\mathbf{v}$ által bezárt szög. $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{v}||\mathbf{u}| \sin\phi$, ahol $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ e irányvektora. Így $D(e, A) = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}|/|\mathbf{u}|$. Ez általában így számolható.

Jelen feladatban $\mathbf{vu} = (-2)2 + (-10)(-1) + (-2)3 = 0$, tehát $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, tehát a keresett távolság éppen $|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 100 + 4} = 6\sqrt{3}$

Sík és pont távolsága (IV/3)

Legyen a sík S, normálvektora leolvasható: $\mathbf{N} = (2, -4, 2)$. Keressünk egy pontot a síkon: $P = (1/2, 0, 0) \in S$, egyszerű behelyettesítéssel látható. $A = (-1, 2, 1) \notin S$. Legyen $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{a} = (3/2, -2, -1)$. Most $D(A, S) = |\mathbf{v}_\perp| = |\mathbf{v}| \cos\vartheta$, ahol ϑ $\mathbf{v}$ és $\mathbf{N}$ szöge és $\mathbf{v}_\perp$ $\mathbf{v}$ síkra merőleges komponense. A skalárszozat definícióját használva: $D(A, S) = |\mathbf{v}| \cos\vartheta = \mathbf{vN}/|\mathbf{N}| = \frac{(3/2)2 + (-2)(-4) - 2}{\sqrt{4+16+4}} =$

Origón átmenő egyenesre való vetítés és tükrözés mátrixa (V/1)

Általában egy $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú egyenesre való vetítés eredményeképp egy olyan vektort kapunk mely $\mathbf{v}$ irányú. és hossza $|\mathbf{r} \cos\vartheta|$, ahol ϑ a két vektor által bezárt szög. Azaz $(\mathbf{r}_v)_i = v_i(\mathbf{vr})/|\mathbf{v}|^2$. (Ellenőrizzük!). A mátrixszrozás (mátrix-vektor) szabályai szerint ez a következőképp áll elő:

$$\mathbf{r}_v = \underline{\underline{V}}\mathbf{r} \tag{3}$$

ahol

$$\underline{\underline{V}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \circ \mathbf{v} \tag{4}$$

ahol a diadikus szorzat előállítható, mint:

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

A merőleges komponens $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{r}_v$. A tükrözés előállítható, mint $\mathbf{r}_t = \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp = -\mathbf{r} + 2\mathbf{r}_v$. Így a tükrözés mátrixa: $\underline{\underline{V}}_T = -\underline{\underline{E}} + 2\underline{\underline{V}}$, ahol $\underline{\underline{E}}$ az egységmátrix.

A konkrét feladatban: $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

és $|v|^2 = 1 + 1 + 4 = 6$ A vetítés mátrixa így

$$\underline{\underline{V}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

A tükrözés pedig:

$$\underline{\underline{V}}_T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Vetítés és tükrözés origón átmenő síkra (V/2)

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel$, a ssíkra merőleges és párhuzamos vektorok összege. A síkra vetített vektor $\mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\perp$. $\mathbf{r}_\perp$ $\mathbf{n}$ irányvektorú egyenesre vetíttett: $\mathbf{r}_\perp = \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}(\mathbf{n} \circ \mathbf{n})\mathbf{r}$ (mint vektor szorozva a mátrixszal). Azaz a síkra vetítés mátrixa $\underline{\underline{V}}_{\mathbf{n}} = \underline{\underline{E}} - \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} \circ \mathbf{n}$

A tükrözés előáll $\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp$, azaz $\underline{\underline{V}}_{T\mathbf{n}} = \underline{\underline{E}} - \frac{2}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} \circ \mathbf{n}$

A feladatban tehát (a diádot már kiszámoltunk fentebb)

$$\underline{\underline{V}}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

és

$$\underline{\underline{V}}_{T\mathbf{n}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$