1. Oldjuk meg a harmónikus oszcillátor differenciálegyenletét:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Írjuk át két elsőrendű differenciálegyenletté, legyen $w = v/\omega$.

$$\dot{w} = -\omega x$$
$$\dot{x} = \omega w$$

Legyen $\mathbf{y} = (w, x)$, ekkor:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

A formális megoldás:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \exp(\mathbf{A}t)$$

Számoljuk ki $\mathbf{A}$ exponenciálisát. Ez az órán megtörtént, de mehet még egyszer. A Taylor sor alapján ez:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Azaz kifejtve

$$w(t) = w_0 \cos(\omega t) - x_0 \sin(\omega t)$$
$$x(t) = w_0 \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit, sajátvektorait. A mátrix önadjungált, válasszunk egymásra merőleges sajátértékeket, pl. $s_1 = (i, 1)$, $s_2 = (-i, 1)$. Mutassuk meg, hogy $\langle s_1 | s_2 \rangle = 0$. A mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a főtengely transzformációt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, a főtengely transzformációt és az exponenciális függvényét:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sajátértékek: 1, 1, 4
Sajátvektorok: $(1,1,1)$, $(-1,0,1)$, $(1,-2,1)$. Válasszunk merőlegeseket! Lehet, mert a mátrix normális (önadjungált is!)

$$\exp(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e+e^4 & -e+e^4 & -e+e^4 \\ -e+e^4 & 2e+e^4 & -e+e^4 \\ -e+e^4 & -e+e^4 & 2e+e^4 \end{pmatrix}$$

4.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy a mátrix nem normális :-)! ($\mathbf{A}\mathbf{A}^* \neq \mathbf{A}^*\mathbf{A}$).
Számoljuk ki a sajátvektorokat $(-5,-16,20)$, $(5,1,0)$, $(1,0,0)$, és mutassuk meg, hogy nem merőlegesek egymásra.

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix sin, cos, exp függvényét:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Diagonalizáljuk az alábbi mátrixukat, ha lehetséges:

- Lehetséges:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 24 & -12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A sajátértékek -2, -2, 2, 2. Sajátvektorok:

$$v_1 = (1,0,-6,0), \quad v_2 = (0,1,3,0), \quad v_3 = (0,0,1,0), \quad v_4 = (0,0,0,1)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Nem:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  Csak két sajátvektor van $v_1 = (1, 0, 0)$ és $v_2 = (5, 1, 1)$, tehát nem!