Számítási módszerek a fizikában 1, 5. hét

I. Írjuk fel a következő kifejezések a Kronecker-delták segítségével.

1. Adott $j, k, l, m, n, s \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{imns} =?$
2. Adott $k, l, n, s \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{4} \varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{ijns} =?$
3. Adott $l, s \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{4} \varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{ijks} =?$
4. $\displaystyle\sum_{i,j,k,l=1}^{4} \varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{ijkl} =?$

II. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ vektorra teljesülnek az alábbiak.

1. $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$
2. $(a \times b) \times (c \times d) = -\langle a, b \times c\rangle d + \langle a, b \times d\rangle c + \langle a, b \times d\rangle c$
3. $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle \langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle \langle b, c\rangle$
4. $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$

III. Affin alterek.

1. Írjuk fel a $A = (2, 3, 1)$ és a $B = (4, 5, -1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy a $P = (1, 3, 1)$ ponton és irányvektora párhuzamos a $(1, 0, 1)$ vektorral.
3. Írjuk fel a $A = (2, 3, 4)$, $B = (4, 5, -1)$ és a $C = (3, 1, 3)$ pontokon átmenő sík egyenletét.
4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmegy a $P = (1, 3, 1)$ ponton és normálvektora párhuzamos a $(1, 0, 1)$ vektorral.

IV. Határozzuk meg az alábbi távolságokat.

1. Mekkora a $(2, 1, 3)$ és a $(4, 6, -1)$ pont távolsága?
2. Mekkora a $(-1, 2, 1)$ pont és az $r(t) = (1, 12, 3) + t(2, -1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes távolsága?
3. Mekkora a $(-1, 2, 1)$ pont és a $2x - 4y + 2z = 1$ sík távolsága?
4. Mekkora az $\dfrac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1$ és a $2 - x = y - 5 = z + 1$ egyenesek távolsága?
5. Mekkora az $r(t) = (1, 1, 3) + t(0, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes és az $x - 2y + z = 1$ sík távolsága?
6. Mekkora a $2x - 4y + 2z = 1$ és az $x - 2y + z = 1$ síkok távolsága?

V. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában az alábbi lineáris transzformációk mátrixát.

1. Az origón átmenő, $v \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú egyenesre való ortogonális vetítés és tükrözés. (A $v = (1, -1, 2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
2. Az origón átmenő, $n \in \mathbb{R}^3$ normálvektorú síkra való ortogonális vetítés és tükrözés. (Az $n = (1, -1, 2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
3. Határozzuk meg a (x, y) síkbeli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.
4. Határozzuk meg az $(1, 1, 0)$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

5* Határozzuk meg az $n \in \mathbb{R}^3$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

VI. Tekintsünk egy egydimenziós harmonikus rezgőmozgást adott D (direkciós állandó) és m (tömeg) paraméterekkel. A koordinátarendszer kezdőpontja legyen a rugó nyugalmi hosszánál. Adott $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban a test helye legyen $x(t)$ sebessége pedig $v(t)$. Ezekből képezzük a $z(t) = (x(t), v(t))$ vektort. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $A(t)$ lineáris transzformáció, melyre $z(t) = A(t)z(0)$ teljesül.

VII*. Tekintsük az alábbi egydimenziós tökéletesen rugalmas ütközéssel kapcsolatos problémát. Egy $M \in \mathbb{R}^+$ tömegű kiskocsi $v_0 \in \mathbb{R}^+$ sebességgel közelít a merev fal felé. A kiskocsi és a fal között egy $m \in \,]0, M[$ tömegű, $u_0 \in \mathbb{R}^+$ sebességű kislabda van. Az n-edik ütközésük után a sebességük legyen v_n illetve u_n.

1. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sqrt{M}v_n$, $\beta_n = \sqrt{m}u_n$ és $w_n = (\alpha_n, \beta_n)$. Mutassuk meg, hogy az ütközés ekkor a
$$w_{n+1} = Bw_n$$
alakba írható, ahol
$$B = \frac{1}{M+m}\begin{pmatrix} M-m & -2\sqrt{mM} \\ 2\sqrt{mM} & M-m \end{pmatrix}.$$
2. Igazoljuk, hogy ha $\varphi = \arccos\dfrac{M-m}{M+m}$, akkor
$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$
3. Mutassuk meg, hogy az ütközések száma
$$N = \left\lfloor \frac{\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{m}{M}} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{m}u_0}{\sqrt{M}v_0}\right)}{\arccos\left(\dfrac{M-m}{M+m}\right)} \right\rfloor + 1.$$

   Mélyebb ismeretekkel az is megmutatható, hogy az $u_0 = v_0$ esetben az ütközések száma az $x = \dfrac{m}{M}$ paraméterrel kifejezve (kis x esetén)
$$N = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{\pi\sqrt{x}}{6} + \mathcal{O}(x^{\frac{3}{2}}).$$