Számítási módszerek a fizikában 1, 3. hét

I. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

1. $\ln(\mathrm{e})$
2. $\ln(-3\,\mathrm{i})$
3. $\ln\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\right)$
4. $\ln(1-\mathrm{i})$
5. $\ln\left(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$

(Ha $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, ahol $0 < |z|$ és $-\pi \le \varphi < \pi$, akkor $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\varphi$.)

II. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

1. $2^{2\,\mathrm{i}}$
2. $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}}\right)^{2\,\mathrm{i}}$
3. $\mathrm{i}^{2\,\mathrm{i}}$
4. $\left(\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right)^{1+\mathrm{i}}$

(Ha $z, v \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, akkor $z^v = \mathrm{e}^{v\ln z}$.)

III. Milyen görbéket határoznak meg a komplex számsíkon az alábbi egyenletek?

1. $|z-(1+2\,\mathrm{i})| = 3$,
2. $z + \bar{z} = z\bar{z}$,
3. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.

IV. A komplex számtest felett oldjuk meg az egyenleteket.

1. $z^3 = \bar{z}$
2. $z^2 - 5(1+\mathrm{i})z + 13\,\mathrm{i} = 0$
3. $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$
4. $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

V. Geometriai sor összegképletére visszavezethető feladatok.

1. Minden $n, k \in \mathbb{N}$ számra $n \neq 0, 1$ esetén legyen $z_k = \exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,k}{n}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{C}$ esetén teljesülnek az alábbi formulák.

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)\sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)}{\sin\frac{b}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)}{\sin\frac{b}{2}}$$

3. Számoljuk ki $\sum_{k=1}^{20}(1+\mathrm{i})^k$ értékét algebrai alakban.

VI. Komplex számokkal jól kezelhető geometria feladatok.

1. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyre az u, v, z pontok egyenlő oldalú háromszöget adnak meg. (Az $u = 2 + \mathrm{i}$ és a $v = -1 + 3\,\mathrm{i}$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
2. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyek az u és v csúcsponttal rendelkező négyzet középpontjai. (Az $u = 2 + \mathrm{i}$ és a $v = -1 + 3\,\mathrm{i}$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
3. Igazoljuk, hogy ha egy háromszög minden oldalára kifelé olyan szabályos háromszöget rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti háromszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új háromszögek középpontjai szabályos háromszöget határoznak meg.
4. Igazoljuk, hogy ha egy négyszög minden oldalára kifelé olyan négyzetet rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti négyszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új átellenes négyzetek középpontjai összekötő szakaszok merőlegesek egymásra és egyenlő a hosszuk.
5. Tekintsük komplex számsíkon az alábbi transzformációkat.
   $R(\varphi)$: φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) szöggel való elforgatás az origó körül pozitív irányba.
   $L(v)$: v ($v \in \mathbb{C}$) vektorral való eltolás.
   $M(\lambda)$: λ-val ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) való nyújtás.
   Mely egyenletek teljesülnek az alábbiak közül minden $\varphi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén?
   $$R(\varphi)L(v) = L(v)R(\varphi) \quad R(\varphi)M(\lambda) = M(\lambda)R(\varphi) \quad M(\lambda)L(v) = L(v)M(\lambda)$$
   Hogyan írhatjuk le egyszerűbben az alábbi transzformációkat?
   $$R(-\varphi)L(-v)R(\varphi)L(v) \qquad M\left(\frac{1}{\lambda}\right)L(-v)M(\lambda)L(v) \qquad L(-v\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi})R(-\varphi)L(v)R(\varphi)$$