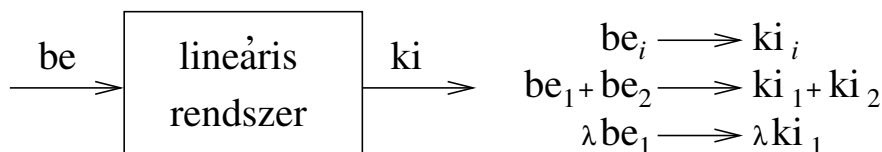


# Részlet Török János, Orosz László, Unger Tamás, Elméleti Fizika 1 jegyzetéből

## 0.1. Lineáris rendszer definíciója



1. ábra. Lineáris rendszer.

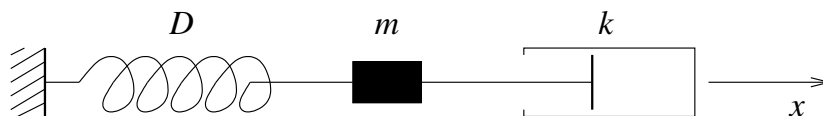
Mielőtt elkezdenénk a csillapított harmonikus oszcillátor vizsgálatát, ismételjük át még egyszer mit is értünk lineáris rendszeren! A lineáris függvény definíciója a következő:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(ax) &= af(x) \end{aligned} \quad (1)$$

A lineáris rendszer definíciója ezzel teljesen analóg, a bemenet és a kimenet között van lineáris kapcsolat, bármi legyen is a bemenet, vagy a kimenet. Amint majd látni fogjuk a harmonikus csillapított oszcillátor esetében ezek függvények lesznek.

## 0.2. Harmonikus oszcillátor

Felmerülhet a kérdés, hogy miképpen kerül egy egyszerű, speciális mechanikai rendszer az általános érdeklődésünk középpontjába (és a fizikus indulóba). A válasz egyszerű. A lineáris mechanikai oszcillátornak olyan tulajdonságai vannak, amelyek alkalmassá teszik őt arra, hogy a példáján keresztül betekintést nyerjünk a lineáris rendszerek jellegzetes viselkedésébe. Mivel a feladat szemléletes, hétköznapi, makroszkopikus tapasztalatokon alapul, ezért könnyen megérthető. Ennek kapcsán pedig általános törvényeket ismerhetünk fel. Ezek aztán a fizika más területein is sikerrel alkalmazhatók.



2. ábra. Csillapított harmonikus oszcillátor

Tekintsük az 2 ábrán látható csillapított harmonikus mechanikai oszcillátort. Ennek egy konkrét megvalósítása a következő. Legyen egy  $m$  tömegű pont, amelyet egy rugóval az  $x$  tengely origójához erősítettünk. A rugó nyugalmi hossza zérus és erősségét a  $D$  rugóállandóval jellemezzük. Hasson a tömegpontra egy sebességgel arányos csillapító erő is a csillapítás erőssége legyen  $k$ . A mozgásegyenlet egy dimenzióban a következő:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} \quad (2)$$

Érdemes átrendezni az egyenletet:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (4)$$

ahol bevezettük a

$$\alpha = \frac{k}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (5)$$

A (4) egyenlet alakját tekintve egy *állandó együtthatójú, másodrendű, közönséges, lineáris, homogén differenciálegyenlet*. *Állandó együtthatójú*, mert  $\{\alpha, \omega_0\}$  időtől független állandók. *közönséges*, mert csak egy változós függvény  $x(t)$  szerepel benne *másodrendű* mert  $x$  második deriváltját tartalmazza, *lineáris*, mert a keresett  $x(t)$  függvényen csak lineáris matematikai műveleteket hajtunk végre (nincsen benne pl.  $x^2$ ,  $\sin(x)$  kifejezés). Végül azért *homogén*, mert az egyenlet jobb oldalán 0 szerepel, azaz nincs  $x$ -ben konstans tag. Ha ott egy tetszőleges előre megadott  $f(t)$  függvény volna, akkor az egyenlet *inhomogén* lenne. Ilyenekkel később még foglalkozunk. Mind majd látni fogjuk a fenti elnevezések önmagukon túlmutató jelentőséggel bírnak és többségüket ki fogjuk használni.

Mivel az egyenlet másodrendű differenciálegyenlet ezért két kezdeti feltételre van szükségünk  $x(t)$  meghatározásához:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (6)$$

A (4) egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (7)$$

mert  $\dot{x} = \lambda \exp(\lambda t)$ , illetve  $\ddot{x} = \lambda^2 \exp(\lambda t)$ , azaz

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = \underbrace{(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2)}_{=0} e^{\lambda t} = 0 \quad (8)$$

Mivel a fenti egyenletnek tetszőleges időpontban igaznak kell lennie, ezért a zárójelben szereplő kifejezésnek nullának kell lennie:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (9)$$

Amint látható ez egy  $\lambda$ -ban másodfokú egyenletre vezetett. Megoldása:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (10)$$

Az egyenletnek mindkét  $\lambda$  megoldása, mivel (4) egyenlet lineáris ezért az egyenlet megoldása a két lambdához tartozó megoldás lineáris kombinációja lesz:

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (11)$$

ahol  $\{a_1, a_2\}$  együtthatók a kezdeti feltételből határozhatók meg.

Jól látható, hogy a fenti általános megoldással vannak problémák, mivel bizonyos esetben  $\lambda_1 = \lambda_2$ , illetve az  $x(t)$  helyfüggvény akár komplexnek is adódhat. Ezeket az eseteket külön megvizsgáljuk.

### 0.2.1. Túlszillapítás

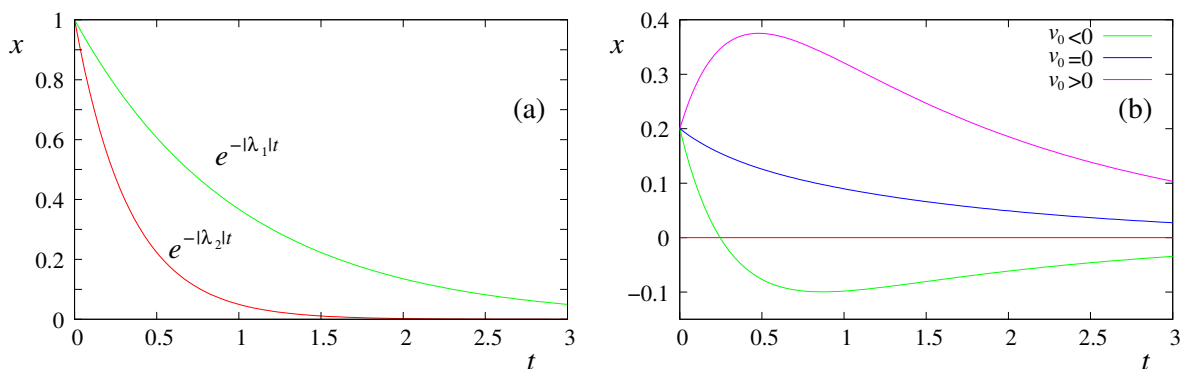
Ebben az esetben  $\alpha > \omega_0$ , azaz  $k > \sqrt{4mD}$ . Ebben az esetben a (10) egyenlet megoldásai különbözőek és valósak és ráadásul negatívak:

$$\lambda_1 = -|\lambda_1|, \quad \lambda_2 = -|\lambda_2| \quad (12)$$

Az  $\{a_1, a_2\}$  együtthatókat az alábbi lineáris egyenletrendszerből tudjuk meghatározni:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= x_0 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 &= v_0 \end{aligned} \quad (13)$$

A mozgást pedig a (11) általános megoldás adja meg.



3. ábra. (a) A két exponenciális részmegoldás, (b) egy-egy példa az  $x(t)$  függvényre különböző kezdősebesség esetén.

A túlszillapított eset jellegzetes mozgásaira a 3 ábra mutat példákat.

## 0.2.2. Határcsillapítás

Ebben az esetben  $\alpha = \omega_0$ , azaz  $k = \sqrt{4mD}$ . Ekkor, mivel  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$  ezért látszólag csak egy megoldás a van az (4) egyenletnek. Ez azonban nem elegendő, hiszen két kezdeti feltételünk  $\{x_0, a_0\}$  van. Azonban a  $\alpha = \omega_0$ , esetén az egyenletnek van egy másik speciális megoldása. Ezt keressük a

$$x(t) = te^{-\alpha t} \quad (14)$$

alakban. Ekkor ugyanis:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x \\ 0 &= -2\alpha e^{-\alpha t} + \alpha^2 t e^{-\alpha t} + 2\alpha (e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}) + \alpha^2 t e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad (15)$$

Tehát az általános megoldás határcsillapított esetben a következő:

$$x(t) = (a_1 + a_2 t) e^{-\alpha t} \quad (16)$$

Az  $\{a_1, a_2\}$  együtthatókat az alábbi lineáris egyenletrendszerből tudjuk meghatározni:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0 \\ a_1 \alpha + a_2 &= v_0 \end{aligned} \quad (17)$$

## 0.2.3. Alulcsillapítás

Ebben az esetben  $\alpha < \omega_0$  azaz  $k < \sqrt{4mD}$ . Ebben az esetben a (10) egyenlet megoldásai komplexek:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_\alpha, \quad (18)$$

ahol  $\omega_\alpha \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ . Az általános megoldás (11) azonban komplex is lehet, miközben az  $x(t)$  elmozdulást a valós számok halmazán kell keresnünk ebből jól látszik, hogy az  $\{a_1, a_2\}$  együtthatók komplexek lesznek. Ha  $x(t) \in \mathbb{R}$ , akkor megegyezik a komplex konjugáltjával. Azaz

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) \\ e^{-\alpha t} (a_1 e^{i\omega_\alpha t} + a_2 e^{-i\omega_\alpha t}) &= e^{-\alpha t} (a_1^* e^{-i\omega_\alpha t} + a_2^* e^{i\omega_\alpha t}) \\ e^{i\omega_\alpha t} \underbrace{(a_1 - a_2^*)}_{=0} &= e^{-i\omega_\alpha t} \underbrace{(a_1^* - a_2)}_{=0} \end{aligned} \quad (19)$$

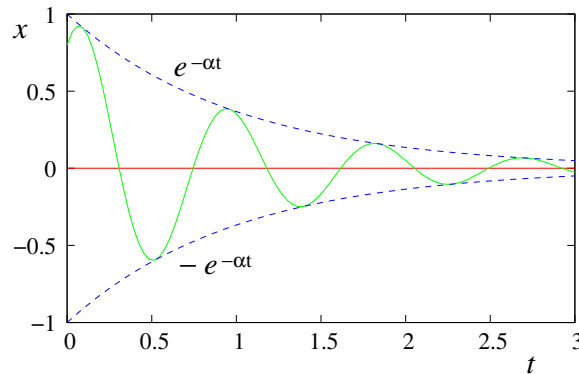
Tehát, ha  $a_1^* = a_2$ , akkor a megoldások valósak. Írjuk fel  $a_1$  és  $a_2$  együtthatókat a következő módon:

$$\begin{aligned} a_1 &= A e^{i\phi} \\ a_2 &= A e^{-i\phi} \end{aligned} \quad (20)$$

A valós általános megoldás tehát a következő:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \underbrace{2A}_a \underbrace{\left[ \frac{e^{i(\omega_\alpha t + \phi)} + e^{-i(\omega_\alpha t + \phi)}}{2} \right]}_{\cos(\omega_\alpha t + \phi)}$$

$$x(t) = ae^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t + \phi) \quad (21)$$



4. ábra. Az alulcsillapított rezgőmozgás és a burkoló exponenciális lecsengés.

A (21) általános megoldást az alábbi ekvivalens alakokba is lehet írni:

$$x(t) = ae^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t + \psi)$$

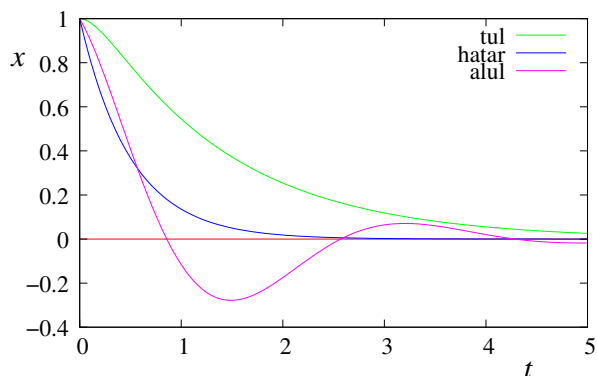
$$x(t) = e^{-\alpha t} [c \sin(\omega_\alpha t) + d \cos(\omega_\alpha t)] \quad (22)$$

A legutóbbi egyenlet illeszthető legkönnyebben a kezdeti feltételekkel:  $d = x_0$ , illetve  $c = v_0$ . A kapott megoldások valójában egy csillapodó rezgést adnak meg, amelynek  $\omega_\alpha$  körfrekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan oszcillátor saját körfrekvenciája  $\omega_0$ . Egy példa látható a 4 ábrán.

#### 0.2.4. Összefoglalás

Legfontosabb megjegyzés, hogy a tömegpont helyzete minden esetben exponenciálisan közelít a nyugalmi helyzethez. Azaz kijelenthetjük, hogy a csillapított harmonikus oszcillátor mindig véges időn belül nyugalomba kerül. (Ezt úgy kell érteni, hogy bármilyen kis  $\varepsilon$  távolságot veszünk az egyensúlyi helyzet körül, a tömegpont véges időn belül nem lép ki ebből a tartományból és ez akkor is így van, ha  $\varepsilon$ -t változtatva az időt is hatványfüggvény szerint átskálázzuk.)

Az előbbi fejezetekben a csillapítást három különböző részre bontottuk, mivel matematikailag más-más úton jutottunk el a megoldáshoz. Azonban ez a felbontás nem csak



5. ábra. A tömegpont helye az idő függvényében adott rugóállandó és változó csillapítás mellett álló helyzetből elengedve. A paraméterek értéke  $\omega_0 = 2\frac{1}{s}$ ,  $\alpha = 3, 2, 0.8\frac{1}{s}$  a túl- (zöld), határ- (kék), illetve alulcsillapított (lila) esetben.

a levezetés miatt lényeges, hanem gyakorlati szempontból is. Vessünk egy pillantást a 5 ábrára! Itt összehasonlítjuk különböző csillapítás esetén egy adott  $m$  tömegű tömegpont helyének időfejlődését, ha kezdetben álló helyzetből véges kitérésből elengedjük. A rugóállandót mindhárom kísérletben ugyanannak választjuk.

Jól látható, hogy a határcsillapítás esetében éri el leggyorsabban a nyugalmi helyzetét a test. A túlcsillapítás nem engedi a testet kellően felgyorsulni, ezért a lecsengés lassú lesz. Alulcsillapítás esetén a test gyorsan áthalad az egyensúlyi helyzeten, de másik oldalt is kilengve tovább oszcillál. A kettő közötti optimum a határcsillapítás. A (10), (16), (21) egyenletekből jól látszik, hogy az exponenciális kitevője pont a határcsillapítás esetén a legkisebb.

Ennek fontos jelentősége van, ugyanis sok olyan gyakorlati probléma van, ahol fontos a rezgések mielőbbi csillapítása. Elég csak pl. az autók kerekeire gondolni, ahol a stabilitás és az úttartás miatt fontos a rezgések mielőbbi csillapítása. A fizika más területén is jól jön ez a tulajdonság. Molekuláris dinamikában [1], ahol ha számítógépen sok-sok részecske statikus helyzetét vizsgáljuk, a határcsillapítás segít az egyensúlyi helyzet mielőbbi elérésében.

### 0.3. Gerjesztett csillapított oszcillátor

Az előző fejezetben láttuk, hogy a csillapított oszcillátor magára hagyva egy idő után megáll. A valóságban azonban egy ilyen rendszert folyamatosan érhetik erőhatások. Az ilyen rendszert gerjesztett csillapított oszcillátornak nevezzük (pl. az autó kereke, ahol a csillapítást a lengéscsillapító, a gerjesztést az út egyenetlenségei adják). Tehát feltételezzük, hogy a csillapított oszcillátorra egy időfüggő  $F(t)$  erő is hat. Ekkor a (2)

mozgásegyenlet a következőképpen módosul:

$$m\ddot{x} + Dx + k\dot{x} = F(t) \quad (23)$$

Tömeggel való osztás után kapjuk az alábbi *inhomogén* differenciálegyenletet:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (24)$$

ahol  $f(t) = F(t)/m$ .

Ez egy lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, amelynek matematikai megoldási technikája közismert. Mivel az egyenlet lineáris, ezért az  $x_{\text{IH}}(t)$  általános megoldás felírható az alábbi alakban:

$$x_{\text{IH}}(t) = x_{\text{H}}(t) + x_{\text{IHP}}(t) \quad (25)$$

ahol  $x_{\text{H}}(t)$  a homogén egyenlet általános megoldása (eddig az előzőekben ezzel foglalkoztunk), a két paraméteres függvényosztály bármelyik eleme lehet és bármilyen kezdeti feltételre illeszthető. Az  $x_{\text{IHP}}(t)$  az inhomogén egyenletnek egy tetszőleges induló értékekkel  $\{x_{\text{IHP}}(0), \dot{x}_{\text{IHP}}(0)\}$  rendelkező megoldása. Ez tehát egy konkrét megoldás, amely nem tartalmaz semmiféle ismeretlen paramétert. Neve *partikuláris* (részleges, nem teljes) megoldás.

Az előzőekben láttuk, hogy a homogén egyenlet megoldása gyorsan lecseng:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{H}}(t) = 0 \quad (26)$$

Ezért ezt a megoldást tranziens megoldásnak is nevezik. Elegendően hosszú időre tehát:

$$x_{\text{IH}}(t) \simeq x_{\text{IHP}}(t) \quad (27)$$

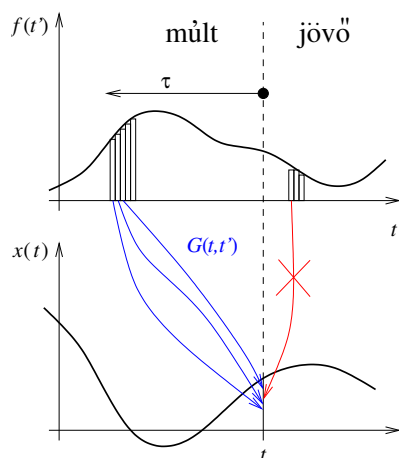
Tehát a rendszer hosszú időre elfelejti a kezdeti feltételeket, ezért az  $x_{\text{IHP}}(t)$ -t *állandósult* megoldásnak nevezzük.

Toljuk ki a kezdeti időpontot a  $t \rightarrow -\infty$ -be, és a teljes  $(-\infty, \infty)$  időtartományon hasson  $f(t)$ , és keressük a  $f(t)$  által generált  $x_{\text{IHP}}(t) = x(t)$  függvényt.

## 0.4. Green-függvény

A 0.1 fejezetben definiáltuk a lineáris rendszereket: Ha  $f_i(t)$  a bement és  $x_i(t)$  a kimenet a lineáris rendszerből akkor a következő kapcsolatok igazak:

$$\begin{aligned} [f_1(t) + f_2(t)] &\rightarrow [x_1(t) + x_2(t)] \\ [af_1(t)] &\rightarrow [ax_1(t)] \end{aligned} \quad (28)$$



6. ábra. A Green-függvény szemléltetése. A múltbeli gerjesztések (kék) hatással vannak a válasz  $t$  időpontbeli értékére, míg a jövőbeliek (piros) nem. A kis téglalapok határesetek az integrál. A gerjesztések idejét mérhetjük labor időben  $t'$ , vagy eltelt időben  $\tau$ , ha a rendszer időben változatlan.

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott bemeneti függvény milyen kimeneti választ ad. Az egész folyamatot a 6 ábra szemlélteti. Általánosságban a fenti lineáris kapcsolatot a következő kifejezéssel lehet leírni:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') f(t') dt' \quad (29)$$

Ami szavakban azt fejezi ki, hogy az  $x(t)$  válaszfüggvény értéke egy adott  $t$  pontban a gerjesztés összes pontban vett hatásának valamilyen súlyozott összege. A súlyozási függvényt *Green-függvénynek* nevezzük.

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszer nem változik az időben (ezt fejezi ki, hogy (4) egyenlet *állandó együtthatójú*). Ekkor a rendszer állapota csak az időkülönbségtől függhet, hiszen bármikor végezzük el a kísérletet ugyanazt az eredményt kell kapnunk:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') f(t') dt' \quad (30)$$

Alapvető fizikai megfigyelés a kauzalitás, azaz az ok-okozati viszony. Ez azt jelenti, hogy  $t' > t$  gerjesztések nincsenek hatással az  $x(t)$  értékére. A gerjesztés válasz kapcsolat tovább egyszerűsödik:

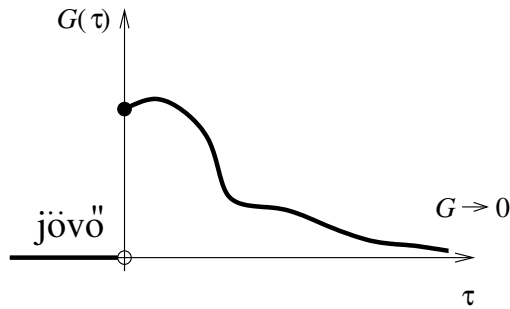
$$x(t) = \int_{-\infty}^0 G(t - t') f(t') dt' \quad (31)$$

Vezessünk be egy változó cserét, amelyben a  $t'$  *mikor* időváltozót a visszanező, *mennyivel ezelőtt*  $\tau \equiv t - t'$  változóval helyettesítjük. Ekkor (31) egyenlet az alábbiak szerint



módosul:

$$x(t) = \int_0^{\infty} G(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (32)$$



7. ábra. Szemléltető példa Green-függvényhez.  $\tau < 0$ -ra a függvény értéke 0, azonban nagy  $\tau$  értékekre is 0-hoz tart a függvény értéke.

Ha megköveteljük, hogy  $G(\tau) = 0$   $\tau < 0$  esetén, akkor a kauzalitást így is írhatjuk (lásd 7:)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

$$G(\tau) = 0, \quad \text{ha } \tau < 0 \quad (33)$$

Fontos észrevétel, hogy

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = 0. \quad (34)$$

Ez azt jelenti, hogy a nagyon régi események nincsenek hatással a mostani válaszra. Ez disszipatív lineáris rendszerekre mindig igaz.

A (33) egyenlet tulajdonképpen két függvényt szoroz össze egy speciális utasítással. Neve *konvolúció* [2].

A (33) egyenlet azért is fontos, mert ha meghatározható  $G(\tau)$  alakja, akkor utána tetszőleges gerjesztéshez kiszámítható a válasz. Az lenne a legjobb, ha találnánk egy bemeneti  $f(t)$  függvényt amire a rendszer pont a Green-függvényt adná válaszul. Ha visszalapozunk a Dirac-delta egyenletéhez jól látható, hogy van ilyen bemenet, mégpedig a Dirac-delta:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \underbrace{f(t - \tau)}_{\delta(t - \tau)} d\tau = G(t) \quad (35)$$

Megjegyezzük, hogy a Dirac-delta teljesíti a  $\delta(\tau) = 0$ , ha  $\tau < 0$  feltételt.

Tehát a Green-függvény a lineáris rendszer Dirac-deltára adott válasza.

Megjegyezzük, hogy sok helyütt használatos a Green-függvény helyett a  $H(t)$  átmeneti függvény, amely a  $\theta(t)$  lépcsőfüggvényre adott válasz. A levezetés teljesen analóg módon megy.

### 0.4.1. Csillapított oszcillátor Green-függvénye

Határozzuk meg a gerjesztett csillapított lineáris oszcillátor Green-függvényét! Amint fent meghatároztuk, a Green-függvény, a rendszer Dirac-deltára adott válasza. Tehát:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (36)$$

$$\ddot{G} + 2\alpha\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t) \quad (37)$$

Fontos megjegyezni, hogy míg  $x$  dimenziója méter ( $[x] = \text{m}$ ), addig a Green-függvényé másodperc ( $[G] = \text{s}$ ). A kettő közötti különbség egy sebesség dimenzió. Olyan, mintha (36) egyenletet elosztottuk volna egy konstans  $f_0 = v_0$  sebességgel. Ha ezt figyelembe vesszük akkor az egyenlet jobb oldala a következő:

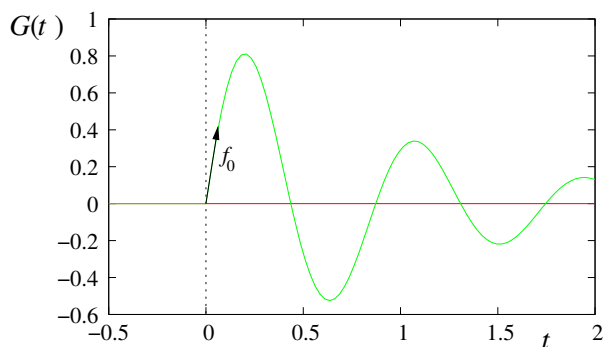
$$F(t) = mf(t) = mf_0\delta(t) \quad (38)$$

Azaz Dirac-deltáról fejezetben megtanultak alapján ez olyan mint egy pillanatszerű erő-lökés. Ez látható a (36) egyenlet idő szerinti integráljából a  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  intervallumon:

$$[\dot{x}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (2\alpha\dot{x} + Dx)dt}_{=\mathcal{O}(\varepsilon)} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_0\delta(t)dt = f_0, \quad (39)$$

ahol a középső integrál  $\varepsilon$  nagyságrendű, mivel hagyományos függvényekből áll. Tehát a sebességváltozás a  $t = 0$  időpillanatban  $f_0$  nagyságú lesz:

$$\begin{aligned} x(0_-) &= 0 & x(0_+) &= 0 \\ \dot{x}(0_-) &= 0 & \dot{x}(0_+) &= f_0 \end{aligned} \quad (40)$$



8. ábra. Alulcsillapított harmonikus oszcillátor Green-függvénye.

Mivel  $t > 0$  esetén a Dirac-delta zérus, ezért visszacapjuk a gerjesztés mentes harmonikus oszcillátort a (40) kezdeti feltételekkel (8 ábra). Ennek viszont már ismerjük a megoldását.

Válasszuk  $f_0 = 1\text{m/s}$  értéket és alulcsillapított esetet, ekkor az általános megoldás (21):

$$x(t) = a \sin(\omega_\alpha t + \phi) e^{-\alpha t} \quad (41)$$

A (40) kezdeti feltételekből meghatározható  $a$  és  $\phi$ . A kapott Green-függvény tehát a következő:

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_\alpha} \sin(\omega_\alpha t) e^{-\alpha t} & \text{ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{ha } t < 0 \end{cases} \quad (42)$$

### 0.4.2. Fourier transzformáció lineáris rendszerekre

A lineáris rendszer válaszfüggvényét a bemenet és a Green-függvény konvolúciójával állíthatjuk elő (33):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (43)$$

A Fourier térben a konvolúció egy egyszerű szorzássá válik:

$$\tilde{X}(\omega) = \sqrt{2\pi} \tilde{G}(\omega) \tilde{F}(\omega), \quad (44)$$

ahol  $\tilde{G}(\omega) = \mathcal{F}[G(t)]$  a Green-függvény Fourier transzformáltja, az *átviteli függvény*.

Határozzuk meg a csillapított oszcillátor átviteli függvényét! Tudjuk, hogy  $\mathcal{F}[\dot{x}] = i\omega \tilde{X}(\omega)$ , illetve  $\mathcal{F}[\ddot{x}] = -\omega^2 \tilde{X}(\omega)$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x &= f(t) \\ -\omega^2 \tilde{X}(\omega) + i\omega \tilde{X}(\omega) + \omega_0^2 \tilde{X}(\omega) &= \tilde{F}(\omega) \\ \tilde{X}(\omega) (-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2) &= \tilde{F}(\omega) \end{aligned} \quad (45)$$

Fourier térben a differenciálegyenlet nagyon egyszerű alakú. A  $\tilde{F}(\omega)$  bemenethez a  $\tilde{X}(\omega)$  kimenetet egyszerű osztással kapjuk:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2} = \sqrt{2\pi} \tilde{G}(\omega) \quad (46)$$

Tehát a csillapított oszcillátor átviteli függvénye:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2)} \quad (47)$$

Ellenőrizhető, hogy a fenti függvény a (42) Green-függvény Fourier-transzformáltja.

Az átmeneti függvény további vizsgálatához írjuk át az átviteli-függvényt Euler-alakba [3]:

$$\tilde{G}(\omega) = \left| \tilde{G}(\omega) \right| e^{-i\gamma} \quad (48)$$

Mivel

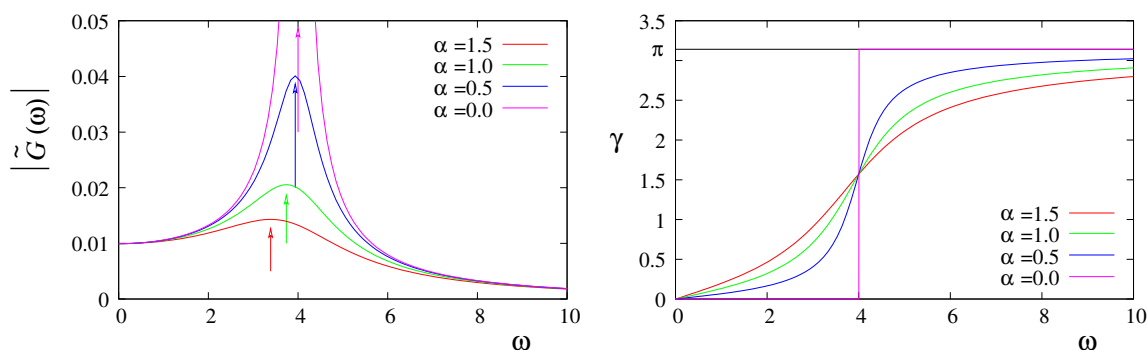
$$\sqrt{2\pi}\tilde{G}(\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (49)$$

ezért

$$\tan \gamma = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (50)$$

$$\left| \tilde{G}(\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \quad (51)$$

A  $\left| \tilde{G}(\omega) \right|$  függvényt *rezonancia görbének* nevezzük.



9. ábra. A csillapított oszcillátor rezonancia görbéje (a) és fázistolása (b),  $\omega_0 = 4$  paraméter esetén különböző  $\alpha$  értékekre. A rezonanciagörbe maximumát az (a) ábrán nyíl jelöli.

Vizsgáljuk meg a kapott eredményeket! A 9 ábrán egy példán szemléltetjük az átviteli függvény és a fázistolás alakját. Jól láthatóan a rezonancia görbének van egy maximuma (bár bizonyos  $\alpha$  értékekre ez megszűnik). Ennek pozíciója számolható, ezt nevezzük a rezonancia frekvenciának. Értéke

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \quad (52)$$

A rezonancia frekvenciának a mérnöki alkalmazásokban kulcsszerepe van. Szinte minden építmény (épület, járművek, stb. ) esetében fontos követelmény a rezonanciák elkerülése. Rezonancia esetében ugyanis a rezgések amplitúdója megnő. Bizonyos esetekben (pl. autó) ez csak nemkívánatos zajokban jelenik meg, azonban más esetekben

a túl nagy amplitúdójú oszcilláció a szerkezet károsodásához vezethet. Egyik jól ismert példa a Tacoma-híd katasztrófája [4]. Manapság alapkövetelmény, hogy a szerkezetre ható rezgések (szél, földrengés) tipikus tartományában az épített struktúra jól csillapítson és ebben a tartományban rezonanciafrekvenciák ne forduljanak elő.

# Irodalomjegyzék

- [1] Wikipedia, *Molecular dynamics*,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular\\_dynamics](http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular_dynamics).
- [2] Wikipedia, *Convolution*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>.
- [3] Wikipedia, *Euler-képlet*, <http://hu.wikipedia.org/wiki/Euler-képlet>.
- [4] Wikipedia, *Tacoma Narrows Bridge (1940)*,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma\\_Narrows\\_Bridge\\_\(1940\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940)).