Házi Feladat 6, komment

2019. március 21.

A feladatban a harmonikus oszcillátor koherens állapotait vizsgáljuk. Mint majd látjuk (ez a feladat célja!) ezek térben egészen jól lokalizált hullámcsomagok, amik mozgása a klasszikus mechanikából várthoz hasonló.

Az órai esethez hasonlóan, a harmonikus oszcillátor $|n\rangle$ sajátbázisában kell dolgozni, valamilyen $n < N$ csonkolást (pl. $N = 1000$) alkalmazva, az órai feladatban szereplő $\hat{a}$ és $\hat{a}^\dagger$ operátorokat (mátrixokat) használva.

A koherens állapotot egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szám jellemzi, mint majd látjuk, ez kb. a hullámcsomag kitérésének felel meg. Az állapot-vektor pedig (a csonkolásra figyelve):

$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ .$$

Ahhoz, hogy ezt felépítsük, az alábbi vektort kell tehát előállítani:

$$\underline{\alpha} = e^{-\alpha} \begin{pmatrix} 1. \\ \alpha \\ \alpha^2/\sqrt{2} \\ \dots \\ \alpha^{N-1}/\sqrt{(N-1)!} \end{pmatrix}$$

A szám-túlcsordulást (overflow) elkerülendő, a vektorelemek előállítását érdemes iteratív végezni:

$$\alpha[0] = e^{-\alpha} \ ,$$

$$\alpha[n] = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \, \alpha[n-1] \ .$$

Ha ezekkel megvagyunk, akkor az órához hasonló módon, ezt a vektort át kell transzformálni az $\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ mátrix sajátbázisába, majd szintén az órai feladat alapján lehet a hullámfüggvény abszulútérték-négyzetét ábrázolni.

Legvégül, a $\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 0.5$ Hamilton-mátrix $e^{-i\hat{H}t}$ exponenciális függvényét meghatározva (lásd 5. óra) meg kell adnunk az $|\alpha(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\alpha\rangle$ állapotot.

Az $|\alpha(t)\rangle$ állapot X sajátbázisban kifejezett hullámfüggvény-négyzetét pedig különböző t időpontokra ábrázoljuk, ugyanúgy mint az előbb. Ha minden jól sikerült, akkor ezek egy „klasszikus harmonikus rezgést” végző hullámcsomag mozgását fogják adni.