

Modern matematikai módszerek a fizikában

Gyakorló feladatok

1. feladat:

(a) Határozza meg az

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

függvény Laurent-sorát a $|z| < 1$, $1 < |z| < 3$ és $3 < |z|$ tartományokban!

(b) Számolja ki az alábbi integrált!

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + x - 2)\delta(x^2 - 4x - 5) dx \quad (1)$$

2. feladat:

(a) Határozza meg az

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 - 5z + 6}$$

függvény Laurent-sorát a $|z| < 2$, $2 < |z| < 3$ és $3 < |z|$ tartományokban!

(b) Számolja ki az alábbi integrált!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) \delta(x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

3. feladat:

(a) Számítsa ki a következő integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = ?$$

(b) Mutassa meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^{4n}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right).$$

Mekkora lesz $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$?

4. feladat:

- (a) Számítsa ki a következő integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = ?$$

- (b) Mutassa meg, hogy ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{4+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \sin a.$$

Segítség: a \sin függvény felírható két komplex fázis összegeként. Ennek megfelelően terjessze ki a valós tengelyen futó integrált a megfelelő komplex fél-síkokra!

5. feladat:

- (a) Írja át az

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 2\delta(x) + \delta'(x)$$

disztribúciós egyenletet kezdetiérték feladattá!

- (b) Oldja meg az egyenletet Fourier-transzformációs módszerrel!

6. feladat:

- (a) Írja át a

$$3f''(x) + 4f'(x) + f(x) = \delta(x) - 3\delta'(x)$$

disztribúciós egyenletet kezdetiérték feladattá!

- (b) Oldja meg az egyenletet Fourier-transzformációs módszerrel!

7. feladat:

- (a) Írja át a

$$z'(x) + 3z(x) = e^{-x} \quad z(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot disztribúciós egyenletté!

- (b) Oldja meg az egyenletet Fourier-transzformációs és Green-függvényes módszerrel is!