Analízis fizikusoknak és mérnököknek 1. zh 2020. október 20.

Munkaidő: 100 perc. Pontozás: 6(+1,5 szorgalmi)+4+4,5+2+3,5=20(+1,5) pont. (17 p=100%)

L'Hospital szabályt ebben a zh-ban még ne használjunk! Ha valaki használja, csak részpontot kaphat.

1. (a) $a_n = n(\sqrt{n^4+n} - n^2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =?$

   (+ szorgalmi) Adjunk meg $\epsilon > 0$-hoz ill. $K > 0$-hoz (a határértéktől függően) egy megfelelő küszöbszámot is.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n =?$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right) =?$ (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} =?$

2. Mutassuk meg, hogy az $a_0 = 0,1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + \frac{1}{a_n}}{3}$, $n \geq 0$ rekurzív sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét! (Segítségként: $a_1 = 3,4$; $a_2 = 2,36$; $a_3 = 1,72$; $a_4 = 1,34$; $a_5 = 1,14$.)

   (Ötlet: a bizonyítás közben használjunk teljes indukciót és a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget, ez utóbbit három számra).

3. Hogyan kell az A, B, C valós paraméterek értékét megválasztani ahhoz, hogy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{, ha } x < 0, \\ A & \text{, ha } x = 0, \\ B + C\,e^{x^2+x} & \text{, ha } x > 0 \end{cases}$$

   (a) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén folytonos legyen?

   (b) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható legyen?

   (c) Utóbbi esetben adjuk is meg $f'(x)$-et az egész $\mathbb{R}$-en!

4. Írjuk fel $f(x) = x^{\ln x}$ érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = e$ pontban.

5. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5}$.

   (a) Adjuk meg f értelmezési tartományát és értékkészletét! (Segítség: ábrázoljuk az x^2+2x+5 függvényt!)

   (b) Adjuk meg a lehető legbővebb $x = 1$ pontot tartalmazó intervallumot, amelyre megszorítva f-et, az invertálható!

   (c) Erre az intervallumra megszorítva f-et, adjuk meg az inverzfüggvény deriváltját a $\sqrt{8}$ pontban! (Elég egyféleképpen, kétféle megoldásért plusz pont jár.) Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is!

Analízis fizikusoknak és mérnököknek 1. zh 2020. október 20.

Munkaidő: 100 perc. Pontozás: 6(+1,5 szorgalmi)+4+4,5+2+3,5=20(+1,5) pont. (17 p=100%)

L'Hospital szabályt ebben a zh-ban még ne használjunk! Ha valaki használja, csak részpontot kaphat.

1. (a) $a_n = n(\sqrt{n^4+n} - n^2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =?$

   (+ szorgalmi) Adjunk meg $\epsilon > 0$-hoz ill. $K > 0$-hoz (a határértéktől függően) egy megfelelő küszöbszámot is.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n =?$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right) =?$ (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} =?$

2. Mutassuk meg, hogy az $a_0 = 0,1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + \frac{1}{a_n}}{3}$, $n \geq 0$ rekurzív sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét! (Segítségként: $a_1 = 3,4$; $a_2 = 2,36$; $a_3 = 1,72$; $a_4 = 1,34$; $a_5 = 1,14$.)

   (Ötlet: a bizonyítás közben használjunk teljes indukciót és a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget, ez utóbbit három számra).

3. Hogyan kell az A, B, C valós paraméterek értékét megválasztani ahhoz, hogy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{, ha } x < 0, \\ A & \text{, ha } x = 0, \\ B + C\,e^{x^2+x} & \text{, ha } x > 0 \end{cases}$$

   (a) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén folytonos legyen?

   (b) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható legyen?

   (c) Utóbbi esetben adjuk is meg $f'(x)$-et az egész $\mathbb{R}$-en!

4. Írjuk fel $f(x) = x^{\ln x}$ érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = e$ pontban.

5. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5}$.

   (a) Adjuk meg f értelmezési tartományát és értékkészletét! (Segítség: ábrázoljuk az x^2+2x+5 függvényt!)

   (b) Adjuk meg a lehető legbővebb $x = 1$ pontot tartalmazó intervallumot, amelyre megszorítva f-et, az invertálható!

   (c) Erre az intervallumra megszorítva f-et, adjuk meg az inverzfüggvény deriváltját a $\sqrt{8}$ pontban! (Elég egyféleképpen, kétféle megoldásért plusz pont jár.) Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is!