Bevezető Kalkulus

Szombathy Dominik*

Tartalomjegyzék

1. Deriválás **4**
1.1. Deriválás definíció szerint 4
1.2. Deriválás alapszabályai 5
1.3. Alapderiváltak 6
1.4. Hiperbólikus függvények deriváltjai 7
1.5. További függvények deriváltja 7
1.6. Gyakorlópéldák deriválásra: 9
1.6.1. További gyakorló példák a $(f \circ g(x))'$, $(f(x) * g(x))'$, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ deriváltakra vonatkozó szabályok segítségével: 9

2. Integrálás **14**
2.1. Határozatlan integrál 14
2.2. Határozott integrál 14
2.3. Integrálási alapszabályok 14
2.3.1. Határozatlan integrálok 14
2.4. Alap integrálok 15
2.5. Két függvény összegének, függvény számszorosának és az első helyettesítéses integrálási speciális esetnek az alkalmazásai . . 15
2.6. Parciális integrálás és a további alapintegrálok alkalmazása . 16
2.7. Helyettesítéses integrálás alkalamzása a speciális esetken túl . 18
2.8. Helyettesítéses integrálás, második verzió 19

3. Komplex számok **24**
3.1. Bevezetés 24
3.1.1. Műveletek komplex számokkal 25
3.2. Feladatok 25
3.2.1. Összeadás és kivonás 25
3.2.2. Szorzatok és hányadosok 25
3.2.3. Algebrai és trigonometriai alak 26
3.2.4. Algebrai alak 26

*Karban tartja Svastits Domonkos

3.2.5. Trigonometrikus alak 27
3.2.6. Abszolút érték számítás 27
3.2.7. Gyökvonás és hatványozás 28
3.2.8. Egyenletek komplex számokkal 30
3.2.9. Egyenletrendszerek komplex számokkal 32
3.2.10. Komplex logaritmus, illetve komplex hatványkitevő . 33
3.2.11. Komplex számok logaritmusa: 33
3.2.12. Komplex hatványkitevő: 33
3.2.13. extra feladatok: 34

4. Vektortér, Vektor algebra **35**
4.1. Definíció: 35
4.2. Lineáris függetlenség: 35
4.3. Bázis: 35
4.4. Skaláris szorzat: 35
4.5. Geometriai definíció (most speciálisan $\mathbb{R}^3$-ban): 36
4.6. Skaláris szorzat bázisban, most speciálisan $\mathbb{R}^2$-ben: 36
4.7. Feladatok: 36
4.7.1. Vektorok keresztszorzata/vektoriális szorzata: 39
4.7.2. Vegyes szorzat: 40
4.7.3. Indexes számolás: 40

5. Analítikus geometria **45**
5.1. Egyenes egyenlete: 45
5.2. Egyenes és pont távolsága: 47
5.3. Egyenesek távolsága: 48
5.4. Sík egyenlete: 49
5.5. Pont és sík távolsága: 51
5.6. Összegzés 52

6. Lineáris leképezések **54**

7. Mátrix determináns számítás **60**

8. Mátrix Inverz számítás **68**

9. Gauss elimináció **71**
9.1. Gauss-elimináció egyenletrendszerek megoldására 71
9.2. Gauss-elimináció mátrixok invertálására 74

10. Sajátértékek és sajátvektorok **77**
10.1. Diagonális mátrixok sajátértékei és sajátvektorai 81
10.2. Felső és alsó $\triangle$ mátrixok 82
10.3. Inverz mátrixok 83

11. Spectrálfelbontás és diagonalizáció **85**
11.0.1. Mátrix függvények 86

12. Taylor sorfejtés **88**
12.1. Alapvető Taylor sorok 88

1. Deriválás

1.1. Deriválás definíció szerint

Deriválás, gyors definíció és példa a kiszámítására : Az x_0 pontban vett derivált definíció alapján a következő módon számítható ki

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{1.1}$$

ahol a határérték alapján kell kiszámítanunk a fenti értéket adott x_0 pontban. Néhány egyszerű függvény példaként:

- $f(x) = x^3$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3\Delta x x_0^2 + 3\Delta x^2 x_0 + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x} \tag{1.2}$$

  Véve az $\lim_{\Delta x \to 0}$ határértéket, látható, hogy a számlálóban csak a lineáris tag együtthatója marad, hiszen a Δx-el való egyszerűsítés után, minden további tagban marad még, legalább első hatványon, egy Δx-el arányos kifejezés, amivel azonban nullába tartunk. Így azok a tagok eltűnnek a limesz képzés után. Vagyis:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2 = 3x_0^2. \tag{1.3}$$

- $f(x) = \sin(x)$
  Felhasználjuk, hogy tudjuk a következő határértéket: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$[1],
  illetve $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0$[2]
  Így használva a szinuszra vonatkozó addíciós tételt

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \tag{1.4}$$

  a következő adódik:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x_0) + \cos(\Delta x)\sin(x_0) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \dots$$
$$\dots = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x_0) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x_0) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \tag{1.5}$$

  Az első tag egyértelműen egyszerűen $\cos(x_0)$, míg a második tag, fentebbi határértékek alapján egyszerűen nulla, összességében tehát $f'(x_0) = \cos(x_0)$.

[1] ld. egységkörön vett kisebb, nagyobb relációja a $\sin(x)$, x és $\tan(x)$ függvényeknek.
[2] könnyen belátható, ha bővítjük a törtet 1-el,azaz $\frac{cos(\Delta x)+1}{cos(\Delta x)+1}$ -el.

- $f(x) = e^x$
  Ennek a deriváltnak a kiszámításához felhasználjuk, hogy $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \tag{1.6}$$

  Felhasználva a fentebbi határértékre vonatkozó azonosságot, a derivált egyszerűen $f'(x_0) = e^{x_0}$.

további példák gyakorlásra:

- $f(x) = x^3 + x^2 + c$, ahol c egy constans.
- $f(x) = cos(x)$
- $f(x) = e^{c \cdot x}$

1.2. Deriválás alapszabályai

Konstans függvény deriváltja

Konstans vagy állandó értékű függvény deriváltja 0:

$$f(x) = c \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 0 \tag{1.7}$$

Két füffvény összegének deriváltja

$$f(x) = (g(x) + h(x)) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = g'(x) + h'(x) \tag{1.8}$$

Szorzatfüggvény deriváltja

$$f(x) = g(x)h(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \tag{1.9}$$

Összetett függvény deriváltja

$$f(x) = g(h(x)) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \tag{1.10}$$

(1.7) és (1.9) szabályok értelmében

$$f(x) = c \cdot g(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = c \cdot g'(x) \tag{1.11}$$

1.3. Alapderiváltak

Hatványfüggvények deriváltja

$$f(x) = ax^{\gamma} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = a\gamma x^{\gamma-1}, \tag{1.12}$$

ahol a és γ egy nullától különböző konstans. Amennyiben $\gamma = 0$ a derivált eltűnik.

Felhasználva az összegfüggvényekre vonatkozó deriválási szabályt (1.8), polinomok deriváltját a következő alakban írhatjuk fel:

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r \cdot x^r \qquad \rightarrow \qquad P_n'(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r \cdot r \cdot x^{r-1}, \tag{1.13}$$

ahol $P_n(x)$ egy n-ed fokú polinom, c_r pedig az egyes hatványokhoz tartozó szorzófaktorok.

Exponenciális függvény deriváltja

$$f(x) = e^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = e^x \tag{1.14}$$

$$f(x) = e^{cx} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = ce^{cx} \tag{1.15}$$

Lagoritmus deriváltja

$$f(x) = ln(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \tag{1.16}$$

trigonometrikus függvények deriváltja

$$f(x) = \sin(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \cos(x) \tag{1.17}$$

$$f(x) = \cos(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = -\sin(x) \tag{1.18}$$

$$f(x) = \tan(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \tag{1.19}$$

$$f(x) = \cot(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \tag{1.20}$$

1.4. Hiperbólikus függvények deriváltjai

Legyenek a, b és c valós konstansok.

- $f(x) = \sinh(x)$

$$f(x) = a\sinh(bx) = \frac{a}{2}\left(e^{bx} - e^{-bx}\right) \to f'(x) = \frac{a}{2}\left(be^{bx} - (-b)e^{-bx}\right) = a{\cdot}b\cosh(bx) \tag{1.21}$$

- $f(x) = \cosh(x)$

$$f(x) = \cosh(x) \qquad \to \qquad f'(x) = \sinh(x) \tag{1.22}$$

  e^{bx} deriválásánál az összetett függvényekre vonatkozó deriválási szabályt (1.10) alkalmaztuk.

- $f(x) = \tanh(x)$

$$f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \to f'(x) = \frac{\cosh(x)}{\cosh(x)} + \frac{\sinh^2(x)(-1)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \tag{1.23}$$

1.5. További függvények deriváltja

- $f(x) = a^x$

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a)^x}\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)} * (x\ln(a))' = e^{x\ln(a)}\ln(a) = \ln(a)\ a^x. \tag{1.24}$$

  Ennél a példánál ismét az összetett függvény deriválására vonatkozó szabályt használtuk fel. Ahol a külső függvény $f(x) = e^x, (f(x))' = e^x$, míg belső függvény $g(x) = x\ln(a), (g(x))' = \ln(a)$.

- $f(x) = x^x$

$$\left(\left(e^{\ln(x)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)} * (x\ln(x))' = x^x * (1 + \ln(x)) \tag{1.25}$$

  Itt ismét először az összetett függvény deriválására vonatkozó szabályt használtuk fel, majd a $(x * \ln(x))'$ deriválás elvágzésekor a függvények szorzatára vonatkozó szabályt alkalmaztuk, azaz $(x * \ln(x))' = (x)' * \ln(x) + x(\ln(x))' = 1 * \ln(x) + x * \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

- Honnan tudtuk megmondani, hogy a logaritmus deriváltja, azaz az exponenciális függvény inverz függvényének deriváltja $(\ln x)' = \frac{1}{x}$?
  Ha ismert az $(f(x))'$ derivált, az inverz függvény, $f^{-1}(x) : f\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}(f(x)) = x$, deriváltja:

$$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

  vagyis vesszük az eredeti függvény deriváltját és azt az $f^{-1}(x)$ pontban értékeljük ki.
  Ez alapján a logaritmus deriváltja úgy számítható ki, hogy ha $f(x) = e^x$, akkor $f^{-1}(x) = \ln(x)$, hiszen $e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$ a logaritmus definíciója alapján.

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^x)'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

- $f(x) = sin(x)^{\sin(x)}$

$$\Big((\sin(x))^{\sin(x)}\Big)' = \Big(e^{\sin(x)\ln(\sin(x))}\Big)' = e^{\sin(x)\ln(\sin(x))}\,(\sin(x)\,\ln(\sin(x)))' \tag{1.26}$$

$$= (\sin(x))^{\sin(x)}\,(\cos(x)\ln(\sin(x)) + \cos(x)) \tag{1.27}$$

$$= (\sin(x))^{\sin(x)}\,\cos(x)\,(1 + \ln(\sin(x))) \tag{1.28}$$

  . Itt ismét a függvények szorzatára vonatkozó deriválási szabályt alkalmaztuk, illetve elvégeztük, az alábbi összetett függvény deriválását, $(\ln(\sin(x)))' = \frac{1}{\sin(x)} * \cos(x) = \mathrm{ctg}(x)$, aho la külső függvény az $f(x) = \ln(x)$, míg a belső függvény a $g(x) = \sin(x)$ és $(f(x))' = \frac{1}{x}$, illetve $(g(x) = \cos(x))'$.

- $f(x) = \arctan(x)$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{(\tan(x))'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{1+x^2} \tag{1.29}$$

  Az utolsó nevező kiszámításához egyrészt felhasználtuk a tangens függvény deriváltjára vonatkozó eredményt, illetve mivel tudjuk, hogy $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, a nevezőben maradó tag $1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2$ az inverz függvény definíciója miatt.

- $f(x) = \arcsin(x)$

$$(\text{arsinh}(x))' = \frac{1}{(\sinh(x))'(\text{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\text{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\text{arsinh})(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{1.30}$$

1.6. Gyakorlópéldák deriválásra:

- $\left((\sin(x))^{\sin(x)}\right)' = \left(e^{\sin(x)\ln(\sin(x))}\right)' = e^{\sin(x)\ln(\sin(x))} * (\sin(x) * \ln(\sin(x)))' = (\sin(x))^{\sin(x)} * (\cos(x)\ln(\sin(x)) + \cos(x)) = (\sin(x))^{\sin(x)} * \cos(x) * (1 + \ln(\sin(x)))$. Itt ismét a függvények szorzatára vonatkozó deriválási szabályt alkalmaztuk, illetve elvégeztük, az alábbi összetett függvény deriválását, $(\ln(\sin(x)))' = \frac{1}{\sin(x)} * \cos(x) = \text{ctg}(x)$, aho la külső függvény az $f(x) = \ln(x)$, míg a belső függvény a $g(x) = \sin(x)$ és $(f(x))' = \frac{1}{x}$, illetve $(g(x) = \cos(x))'$.

- $(\arctan(x))'$: Mint tudjuk ez a függvény a tangens inverz függvénye, $\arctan(\tan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$. Vagyis $f^{-1}(x) = \arctan(x)$, illetve $f(x) = \tan(x)$. Alkalmazva az inverz függvény deriválására vonatkozó szabályt:

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{(\tan(x))'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{1+x^2}$$

  Az utolsó nevező kiszámításához egyrészt felhasználtuk a tangens függvény deriváltjára vonatkozó eredményt, illetve mivel tudjuk, hogy $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, a nevezőben maradó tag $1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2$ az inverz függvény definíciója miatt.

- $(\text{arsinh}(x))'$: Itt az $\text{arsinh}(x)$ függvényre ismét mint inverz függvényre tekintünk, $f(x) = \sinh(x)$, $f^{-1}(x) = \text{arsinh}(x)$. Vagyis ismét alkalmazva az inverz függvény deriválására vonatkozó szabályt

$$(\text{arsinh}(x))' = \frac{1}{(\sinh(x))'(\text{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\text{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\text{arsinh})(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1.6.1. További gyakorló példák a $(f \circ g(x))'$, $(f(x) * g(x))'$, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ deriváltakra vonatkozó szabályok segítségével:

- $\left(\frac{\sin(x)+1}{\cos(x)-1}\right)' = \frac{(\sin(x)+1)' * (\cos(x)-1) - (\sin(x)+1) * (\cos(x)-1)'}{(\cos(x)+1)^2} = \frac{\cos(x) * (\cos(x)-1) - (\sin(x)+1) * (-\sin(x))}{(\cos(x)+1)^2} = \frac{1-\cos(x)+\sin(x)}{(\cos(x)-1)^2}$

- $\left(\frac{x-1}{x^2}\right)' = \frac{(x-1)'*x^2-(x-1)*\left(x^2\right)'}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$
- $\left(\frac{x^3+4}{1+2x}\right)' = \frac{\left(x^3+4\right)'*(1+2x)-\left(x^3+4\right)*(1+2x)'}{(1+2x)^2} = \frac{3x^2+4x^3-8}{(1+2x)^2}$
- $\left(\left(x^2+1\right)^4\right)' = 4\left(x^2+1\right)^3 * 2x$. Itt ismét a zösszetett függvény deriválási szabályt alkalmaztuk, ahol $f(x) = x^4$, $(f(x))' = 4x^3$, illetve $g(x) = x^2+1, (g(x))' = 2x$
- $\left(\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^5\right)' = 5\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^4 * \frac{x}{x+1}$. Ismét az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabályt alkalmaztuk, ahol $f(x) = x^5$, $(f(x))' = 5x^4$, illetve $g(x) = \frac{x^2+1}{x+1}, (g(x))' = \frac{\left(x^2+1\right)'*(x+1)-\left(x^2+1\right)*(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$
- $(\tan^n(x))' = n\tan^{n-1}(x) * \frac{1}{\cos^2(x)}$. Itt ismét az összetett függvény külső függvénye $f(x) = x^n, (f(x))' = n * x^{n-1}$, míg a belső függvény $g(x) = \tan(x), (g(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
- $(2\sin(x)\cos(x))'$: Itt két féleképpen járhatunk el:
  - Felismerjük, hogy $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, ahonnan a derivált már triviális, hiszen ez ismét egy összetett függvény, ahol a külső függvény $f(x) = \sin(x)$, $(f(x))' = \cos(x)$, míg a belső függvény $g(x) = 2x, (g(x))' = 2$, vagyis összességében a $(2\sin(x)\cos(x))' = 2\cos(2x)$ eredmény adódik.
  - A másik megoldás, hogy a kifejezésre egyszerűen mint két függvény szorzatára tekintünk, ahonnan pedig a derivált $2(\sin(x))'\cos(x) + 2\sin(x)(\cos(x))' = 2\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right) = 2\cos(2x)$. Itt az utolsó lépésben alkalamztuk a kétszeres szög koszinuszára vonatkozó összefüggést.
- $\left(\left(x^2+2\right)\sin\left(\sqrt{x+3}\right)\right)' = \left(x^2+2\right)'\sin\left(\sqrt{x+3}\right) + \left(x^2+2\right)\left(\sin\left(\sqrt{x+3}\right)\right)' = 2x\sin\left(\sqrt{x+3}\right) + \left(x^2+3\right)\frac{\cos\left(\sqrt{x+3}\right)}{2\sqrt{x+3}}$. A második tagban ismét egy összetett függvényt kellett deriválnunk, ahol a külső függvény $f(x) = \sin(x)$, $(f(x))' = \cos(x)$, míg a belső függvény $g(x) = \sqrt{x+3}$, $(g(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$.
- $(\arctan(2x))' = 2\frac{1}{1+4x^2}$. Külső függvény $f(x) = \arctan(x), (f(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, belső függvény $g(x) = 2x, (g(x))' = 2x, (g(2x))' = 2$.
- $(x^e e^x)' = \left(e^{x+e\ln(x)}\right)' = e^{x+e\ln(x)} * (x + e\ln(x))' = x^e e^x * \left(1 + \frac{e}{x}\right)$. Itt a második lépésben ismételt módon a kifejezésre mint összetett függvéynre tekintettünk, ahol a külső függvény $f(x) = e^x$, $(f(x))' = e^x$, míg a belső $g(x) = x + e\ln(x), (g(x))' = 1 + \frac{e}{x}$.

- $\left(\sin^2(x)\, e^{x^2}\right)' = \left(\sin^2(x)\right)' e^{x^2} + \sin^2(x)\left(e^{x^2}\right)'$.
  A $\left(\sin^2(x)\right)'$ kiszámításánál a külső függvény $(f(x))' = \left(x^2\right)' = 2x$, míg a belső $(g(x))' = (\sin(x))' = \cos(x)$. Így a teljes derivált $\left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$.
  A második tag deriváltjának meghatározásakor a külső függvény $(f(x))' = (e^x)' = e^x$, míg a belső $(g(x))' = \left(x^2\right)' = 2x$, vagyis a végső kifejezés $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.
  Összerekva a két részeredményt, a következő adódik: $\left(\sin^2(x)\, e^{x^2}\right)' = \sin(2x)\, e^{x^2} + \sin^2(x)\, 2xe^{x^2}$

- $\left(\ln^2(\tanh(x))\right)'$: Ez egy háromszorosan összetett függvény: $f(g(h(x)))$, ahol $f(x) = x^2$, ,$(f(x))' = 2x$, $g(x) = \ln(x)$,$(g(x))' = \frac{1}{x}$, $h(x) = \tanh(x)$,$(h(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
  A háromszorosan összetett függvényt az korábban tanult összetett függvényekre vonatkozó szabály kétszeri alkalmazásával tujduk deriválni:
  $$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) * (g(h(x)))' = f'(g(h(x))) * g'(h(x)) * (h(x))'$$
  Beírva fenti deriváltakat, a következőt kapjuk: $\left(\ln^2(\tanh(x))\right)' = 2\ln(\tanh(x)) * \frac{1}{\tanh(x)} * \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{4\ln(\tanh(x))}{\sinh(2x)}$ (mivel $2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$).

- $\left((1+\sqrt{x})^{1/3}\right)'$: Itt a külső függvény $(f(x))' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, míg a belső $(g(x))' = (1+\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tehát a teljes derivált értéke: $\left((1+\sqrt{x})^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^{-2/3} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- $\left(\frac{\sinh(2x)}{\tanh(x)}\right)' = \left(2\cosh^2(x)\right)'$, itt felhasználtuk, hogy $2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$. Most látható módon ez egy összetett függvény $f(g(x))$, ahol a külső függvény $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, illetve a belső függvény $g(x) = \cosh(x)$, $g'(x) = \sinh(x)$.
  Innen a derivált $\left(\frac{\sinh(2x)}{\tanh(x)}\right)' = 2\sinh(2x)$, ahol ismét felhasználtuk, hogy $2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$.

- $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'$: ismét a külső függvény, $(f(x))' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$, míg a belső $(g(x))' = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = 1 + \left(\sqrt{x^2+1}\right)'$. Itt a második derivált ismét egy összetett függvény, ahol a külső függvény $(f(x))' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, míg a belső $(g(x))' = \left(x^2\right)' = 2x$, vagyis összességében $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Ennek segítségével az eredeti deriváltat már ki lehet fejezni, $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1+x/\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

- $\left(\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}\right)\right)'$: A külső függvény $(f(x))' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$, a belső függvény $g(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}$. Ez útóbbinak a deriválásához ismét alkalmazzuk az összetett függvényekre vonatkozó szabályt, ahol a külső függvény $(f(x))' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, míg a belső függvény $\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x+1)-(x^2+1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$. Ismerve a belső függvény deriváltját az eredeti derivált:

$$\left(\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}\right)\right)' = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x^2+1}\frac{x^2+2x-1}{2(x+1)^2}$$

- $\left(e^{\ln(\mathrm{ctg}(x))}\right)'$: Ez egy olyan összetett függvény, ahol a belső függvény ismét egy újabb összetett függvény: a külső függvény $(f(x))' = (e^x)' = e^x$, a belső függvény pedig, mint kijelentettük egy újjabb összetett függvény $(\ln(\mathrm{ctg}(x)))' = \frac{1}{\mathrm{ctg}(x)} * \left(\frac{-1}{\sin^2(x)}\right)$, hiszen a külső függvényre $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, míg a belső függvényre $(\mathrm{ctg}(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$.
  Vagyis összességében $\left(e^{\ln(\mathrm{ctg}(x))}\right)' = e^{\ln(\mathrm{ctg}(x))} * \frac{-1}{\sinh^2(x)\mathrm{ctg}(x)} = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$.
  Egyszerűbb megoldás, ismerjük fel, hogy $e^{\ln(\mathrm{ctg}(x))} = \mathrm{ctg}(x)$, ahonnan a derivált egyszerűen $\frac{-1}{\sinh^2(x)}$.

- $\left(\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right)'$: Itt is két féleképpen járunk el

  - Összetett függvény, ahol a külső függvény a logaritmus, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, a belső függvény egy további összetett függvény, $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)}$ ahol a külső függvény az exponenciális függvény $(e^x)' = e^x$, míg a belső függvény a $(\ln(x)\sqrt{x})' = \frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tehát a derivált összességében: $\frac{1}{x^{\sqrt{x}}}x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
  - Ismerjük fel, hogy a logaritmus tulajdonságai alapján $\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\ln(x)$, ami egy egszerű szorzata két függvénynek, illetve ennek deriváltja éppen az előző pontban kiszámolt belső függvény derivált, vagyis az eredmény ismét $\frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- $(\ln(\ln(x)))'$. Összetett függvény, ahol mind a külső, mind a belső függvény a logaritmus, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, vagyis a derivált $\frac{1}{x\ln(x)}$.

- $\left(\left(\ln^3\left(\ln^6\left(x^{1/5}\right)\right)\right)^{1/4}\right)'$: Alkalmazva a logaritmus azonosságait, ez a következő egyszerű alakra írható át:
  $\left(6^{3/4}\ln^{3/4}\left(\frac{1}{5^6}\ln(x)\right)\right)'$, ismét összetet függvénnyel állunk szemben, ahol

a külső függvény $(f(x))' = \left(x^{3/4}\right)' = \frac{3}{4}x^{-1/4}$, belső függvény pedig a fentebb kiszámolt példa alapján $\left(\ln\left(5^{-6}\ln(x)\right)\right)' = \frac{1}{x\ln(x)}$. Összességében tehát a derivált $\left(\left(\ln^3\left(\ln^6\left(x^{1/5}\right)\right)\right)^{1/4}\right)' = \frac{3*6^{3/4}}{4}\ln^{-1/4}\left(5^{-6}\ln(x)\right)\frac{1}{x\ln(x)}$.

- $\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)' = \frac{(x)'\sin(x)-x(\sin(x))'}{\sin^2(x)} = \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin^2(x)}$, ahol egyszerűen a két függvény hányadosára vonatkozó deriválási szabályt alkalmaztuk.

- $\left(\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)'$: Összetett függvény, ahol a külső függvény az $f(x) = \arcsin(x)$. Először ennek számítjuk ki a deriváltját. Tudjuk, hogy $\arcsin(\sin(x)) = x$, vagyis $(\arcsin(x))' = \frac{1}{(\sin(x))'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ennek tudatában pedig a belső függvény deriváltja $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$.
  Ahonnan a teljes derivált: $-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

- $\left((\arctan(2x))^x\right)' = \left(e^{x\ln(\arctan(2x))}\right)'$. Összetet függvény, ahol a külső függvény egyszerűen az exponenciális függvény, a belső függvény deriválása ismét a trükkösebb feladat, azon belül is a $(\ln(\arctan(2x)))'$ kifejezés. Itt a külső függvény a logaritmus, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, míg belső függvény a már korábban kiszámított $(\arctan(2x))' = \frac{2}{1+4x^2}$. Vagyis a teljes belső függvény deriváltja $(x\ln(\arctan(2x)))' = \frac{2x}{1+4x^2}\frac{1}{\arctan(2x)} + \ln(\arctan(2x))$. Innen a telejs derivált:

$$\left((\arctan(2x))^x\right)' = (\arctan(2x))^x\left(\frac{2x}{1+4x^2}\frac{1}{\arctan(2x)} + \ln(\arctan(2x))\right).$$

2. Integrálás

2.1. Határozatlan integrál

Úgy gondolhatunk rá, mint a deriválás inverzére:

$$\int \mathrm{d}x\ f(x) = F,$$
$$F'(x) = f(x)\,.$$

A határozatlan integrál egy konstans erejéig bármi lehet, hiszen $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x)$, mivel a konstans függvény deriváltja azonosan nulla!

2.2. Határozott integrál

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f\,(x) = F(x_2) - F(x_1)$$

Ez a *Newton-Leibniz szabály.* Úgy is tekinthetünk rá, mint az $f\,(x)$ függvény görbéje alatti *előjeles* területre az x_1 és x_2 pontok között.

2.3. Integrálási alapszabályok

Két függvény összegének/különbségének határozatlan integrálja

$\int \mathrm{d}x\ (f\,(x) \pm g\,(x)) = \int \mathrm{d}x\, f\,(x) \pm \int \mathrm{d}x\, g\,(x)$.

Függvény konstansszorosának határozatlan integrálja

$\int \mathrm{d}x\ c * f\,(x) = c * \int \mathrm{d}x\, f\,(x)$.

Parciális integrálás

$\int \mathrm{d}x\ f'(x) g\,(x) = f\,(x) g\,(x) - \int \mathrm{d}x\, f\,(x) g'(x)$.

Helyettesítéses integrálás

$\int \mathrm{d}x\ f(g\,(x))\, g'(x) = F(g\,(x)) + C$.

2.3.1. Határozatlan integrálok

- $\int \mathrm{d}x\ f(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b)$, ahol $F'(x) = f\,(x)$. Ezt abból láthatjuk, hogy ha a jobb oldalon bővítünk az integrálon kívül $\frac{1}{a}$-val, az integrálon belül pedig a-val, akkor éppen a belső függvény, $g\,(x) = ax + b$ függvény deriváltja, $g'(x) = a$ jelenik meg és alkalmazható a helyettesítéses integrálás szabálya.

- $\int \mathrm{d}x\ g^n(x)\, g'(x) = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C$, mivel a külső függvény $f(x) = x^n$.
- $\int \mathrm{d}x \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$, mivel a külső függvény az $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.4. Alap integrálok

- Hatványfüggvény integrálja: $\int \mathrm{d}x\ x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Mivel a deriválás inverze, könnyen leellenőrizhetjük, hogy $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$ a hatványfüggvény deriválási szabálya alapján. Kivétel, ha $n = -1$, ekkor ugyanis, mivel $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, azt kapjuk, hogy $\int \mathrm{d}x \frac{1}{x} = \ln(|x|) + C$
- $\int \mathrm{d}x\ e^x = e^x + C$
- $\int \mathrm{d}x\ e^{-x} = -e^{-x} + C$.
- Könnyen látható, hogy a hiperbolikus függvények esetén: $\int \mathrm{d}x\ \sinh(x) = \cosh(x)$, illetve $\int \mathrm{d}x\ \cosh(x) = \sinh(x)$,
- $\int \mathrm{d}x\ \sin(x) = -\cos(x) + C$, hiszen $(-\cos(x))' = \sin(x)$,
- $\int \mathrm{d}x\ \cos(x) = \sin(x) + C$, hiszen $(\sin(x))' = \cos(x)$.

2.5. Két függvény összegének, függvény számszorosának és az első helyettesítéses integrálási speciális esetnek az alkalmazásai

- $\int \mathrm{d}x \frac{x^2-7x+8}{x^2} = \int \mathrm{d}x\ 1 - 7\int \mathrm{d}x \frac{1}{x} + 8\int \mathrm{d}x \frac{1}{x^2} = x - 7\ln(|x|) - 8\frac{1}{x} + C$. Az utolsó tagnál $\frac{1}{x^2}$ integrálját egszerűen csak úgy írtuk fel, hogy $\int \mathrm{d}x\ x^{-2} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$.
- $\int_0^4 \mathrm{d}x \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x}\right]_0^4 = \frac{26}{3}$. Itt ismét egyrészt az $\int \mathrm{d}x \sqrt{x}$ integrált hatvány alakba írtuk át, $\int \mathrm{d}x\ x^{1/2} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}$, másrészt a második integrált is az alábbi hatványalakban írtuk fel: $\int \mathrm{d}x\ x^{-1/2} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$.
- $\int \mathrm{d}x \sqrt{x x^{1/3} x^{1/4}}$: Itt érdemes egy hatványkivetővel felírni az integrandust: $\int \mathrm{d}x\ x^{19/24} = \frac{24}{43}x^{43/24} + C$.
- $\int_3^{3+\ln(2)} \mathrm{d}x \frac{1}{e^{3-x}} = \int_3^{3+\ln(2)} \mathrm{d}x e^{x-3} = e^{-3}\int_3^{3+\ln(2)} \mathrm{d}x e^x = \left[e^{x-3}\right]_3^{3+\ln(2)} = 1$.
- $\int \mathrm{d}x\ e^{3x} \cosh(5x)$: Itt felhasználjuk a $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ definíciót és mindent exponenciális függvények segítésével írunk fel: $\int \mathrm{d}x \frac{e^{3x}e^{5x}+e^{3x-5x}}{2} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\ e^{8x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\ e^{-2x} = \frac{1}{16}e^{8x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$. Az

utolsó lépésben alkalmaztuk az első speciális helyettesítéses integrálási szabályt, ahol $f(ax+b) = e^{4x}$, vagyis $f(x) = e^x$ és $a = 2, b = 0$ és $F(x) = e^x$.

2.6. Parciális integrálás és a további alapintegrálok alkalmazása

- $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{d}x\ (x\sin(2x))$: Tudjuk, hogy a integrandus második tagja kifejezhető a következő deriválttal: $\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' = \sin(2x)$. Ezt beírva az eredeti integrálba:
  $\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' = -\left[\frac{x}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x (x)'\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) =$
  $-\left[\frac{x}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x\left(\frac{1}{2}\cos(2x)\right) = \ldots$
  $\cdots = -\left[\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$.

  Itt az utolsó integrál elvégzésénél ismét a helyettesítéses itnegrálás első speciális esetét alkalamztuk, ahol $f(ax+b) = \cos(2x)$, vagyis, $f(x) = \cos(x)$, $a = 2, b = 0$, illetve a primitív függvény $F(x) = -\cos(x)$.

- $\int \mathrm{d}x(3x-5)\, e^{2x+5}$: Először alkalmazva a függvény számszorosára vonatkozó szabályt, $\cdots = e^5 \int \mathrm{d}x(3x-5)\, e^{2x}$. Majd ismét felismreve, hogy a második tag kifejezhető a következő derivált segítségével: $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^{2x}$. Ennek ismeretében használjuk a parciális integrálási szabályt:
  $e^5 \int \mathrm{d}x(3x-5)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^5(3x-5)\,\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{e^5}{2}\int \mathrm{d}x(3x-5)'\, e^{2x} = e^5(3x-5)\,\frac{1}{2}e^{2x} -$
  $e^5 \int \mathrm{d}x 3e^{2x} = \ldots$
  $\cdots = e^5(3x-5)\,\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3e^5}{4}e^{2x} + C$.

- Kérdés: Vajon mi lehet a logaritmus függvény, $f(x) = \ln(x)$ határozatlan integrálja, ha az exponenciális függvényé, mint láthattuk, olyan egyszerű volt.
  Trükk: $\int \mathrm{d}x \ln(x) = \int \mathrm{d}x (x)' \ln(x)$ és innen már könnyedén alkalmazhatjuk a parciális integrálási szabályt:
  $\int \mathrm{d}x (x)' \ln(x) = x\ln(x) - \int \mathrm{d}x x\frac{1}{x} = x\ln(x) - x + C$. Látható, hogy ellenben az exponenciális függvénnyel, korántsem triviális ez a határozatlan integrál!

- $\int \mathrm{d}x \ln\left(x^2+1\right)$: Itt ismét az előző trükköt alkalmazzuk:
  $\int \mathrm{d}x (x)' \ln\left(x^2+1\right) = x\ln\left(x^2+1\right) - \int \mathrm{d}x x\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' = x\ln\left(x^2+1\right) -$
  $\int \mathrm{d}x \frac{2x^2}{x^2+1}$. A fent maradó integrál még igényel egy trükkös átalakítást:
  $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$, itt második tagról tudjuk, hogy az éppen az $\mathrm{arctg}(x)$ függvény deriváltja! Vagyis az integrál értéke: $2\int \mathrm{d}x\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) =$
  $2x - 2\mathrm{arctg}(x) + C$, vagyis a végeredmény:
  $\int \mathrm{d}x \ln\left(x^2+1\right) = x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\mathrm{arctg}(x) + C$.

- **Emlékeztető**: $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
  $\int_0^1 \mathrm{d}x \arcsin(x)$: Ismét a logaritmusnál tanult trükköt alkalmazzuk: $\int_0^1 \mathrm{d}x (x)' \arcsin(x) = \dots$
  $\dots = [x \arcsin(x)]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = [x \arcsin(x)]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\left(1-x^2\right)'}{\sqrt{1-x^2}} = \left[x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$
  Az utolsó lépésben a helyettesítéses integrálás harmadik speciális szabályát alkalmaztuk, $g(x) = 1 - x^2$, illetve $n = -1/2$, hiszen a megjelenő integrandus $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{\left(1-x^2\right)'}{\sqrt{1-x^2}}$ deriváltként írható fel.

- $\int \mathrm{d}x \ \tan(x)$: Itt használva a tangens definícióját: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}$, amire már alkalmazhatjuk ismét a helyettesítéses integrálás harmadik speciális esetét, $-\int \mathrm{d}x \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} = -\ln(|\cos(x)|) + C$.

- $\int_e^{e^e} \mathrm{d}x \frac{1}{x \ln(x)}$: Itt ismét fel tudjuk írni az integrandust a helyettesítéses integrálás harmadik speciális esete szerint, hiszen $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, vagyis az integrál a következő alakba írható: $\int_e^{e^e} \mathrm{d}x \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = [\ln(|\ln(x)|)]_e^{e^e} = 1$.

- $\int \mathrm{d}x \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}$: Itt ismét az előző trükköt alkalmazzuk, azaz megpróbáljuk a számlálót olyan alakba írni, hogy az éppen a nevező deriváltjával egyezzen meg:
  $\frac{1}{3} \int \mathrm{d}x \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+5} = \frac{1}{3} \int \mathrm{d}x \frac{\left(e^{3x}+5\right)'}{e^{3x}+5} = \frac{1}{3} \ln\left(\left|e^{3x}+5\right|\right) + C.$

- $\int_0^{\frac{1}{5}} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{1-5x}}$: Hasonlóan járunk el, a nevezőben a gyök alatt lévő kifejezés deriváljta, $(1-5x)' = -5$.
  Illetve ekkor alkalmazva a második helyettesítéses integrálási szabályt, ahol $g(x) = 1 - 5x$, $n = -\frac{1}{2}$, a következő adódik:
  $-\frac{1}{5} \int_0^{\frac{1}{5}} \mathrm{d}x \frac{(1-5x)'}{\sqrt{1-5x}} = -\left[\frac{2}{5}\sqrt{1-5x}\right]_0^{\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}.$

- $\int \mathrm{d}x \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$: Itt a helyettesítéses integrálás második speciális esetét alkalmazzuk, $g(x) = \sin(x)$, $n = -2$ esetén, mivel az integrandus ismét a következő alakba írható:
  $\sin^2(x)(\sin(x))'$, ahonnan az integrál értéke: $\int \mathrm{d}x \sin^2(x)(\sin(x))' = -\frac{1}{\sin(x)} + C$.

- $\int_{-\pi/2}^0 \mathrm{d}x \cos^3(x)$: Itt érdemes átírni a három koszinuszból kettőt a $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ azonosság alapján, ekkor az integrál a következő alakot ölti:
  $\int_{-\pi/2}^0 \mathrm{d}x \cos(x) - \cos(x) \sin^2(x) = [\sin(x)]_{-\pi/2}^0 - \int_{-\pi/2}^0 \mathrm{d}x (\sin(x))' \sin^2(x),$

ahol a második tagot ismét a helyettesítéses integrálás második speciális esete alapján írtuk át, ahol most $g(x) = \sin(x)$, $n = 2$. Ilyenkor a második tag egyszerűen $\int \mathrm{d}x(\sin(x))' \sin^2(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, vagyis összességében az integrál eredménye:
$\int_{-\pi/2}^{0} \mathrm{d}x \cos^3(x) = \left[\sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{2}{3}$.

- $\int \mathrm{d}x \operatorname{arctg}(x)$: Ahogyan már láthattuk többször, az inverz függvények deriválásánál érdemes az integrandust a következő alakban felírni:
$\int \mathrm{d}x(x)' \operatorname{arctg}(x)$, ahol már ismét alkalmazhatjuk a parciális integrálás módszerét:
$x\operatorname{arctg}(x) - \int \mathrm{d}x \frac{x}{1+x^2}$, itt a második tagban bővítünk 2-vel annak érdekében, hogy a számlálóban megjelenjen a nevező deriváltja, $\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \frac{2x}{1+x^2}$, amit már ki tudunk integrálni a helyettesítéses integrálás 3 speciális esete alapján, $\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\left|1+x^2\right|\right)$, így a teljes integrál:

$$\int \mathrm{d}x \operatorname{arctg}(x) = x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln\left(\left|1+x^2\right|\right) + C.$$

2.7. Helyettesítéses integrálás alkalamzása a speciális esetken túl

- $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \frac{e^{-\tan(x)}}{\cos^2(x)}$: Kihasználjuk, hogy $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, vagyis felírva az integrandust ezszerint:
$-\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x e^{-\tan(x)}(-\tan(x))' = -\left[e^{-\tan(x)}\right]_0^{\pi/2} = 1$, ahol az utolsó lépésben használtuk a helyettesítéses integrálás képletét.

- $\int \mathrm{d}x \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$: Ismét kihasználjuk, hogy tudjuk $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, emiatt bővítve az integrandust $\frac{1}{2}$-el, a következő alakban írhatjuk fel az integrált: $2\int \mathrm{d}x \sinh(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = 2\cosh(\sqrt{x}) + C$, ahol ismét a "szokásos" helyettesítéses integrálási lépést hajtottuk végre, illetve kihasználtuk, hogy tudjuk $\int \mathrm{d}x \sinh(x) = \cosh(x) + C$.

- $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$: Ebben az esetben kicsit bonyolultabb a helyzet, fel kell ismernünk, hogy a következő integrál kiszámítható, $\int \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$. Ennek tudatában látható, hogy az integrandus éppen ez a függvény az e^x belső függvénnyel, melynek azonban a deriváltja is megjelenik a számlálóban:
$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \frac{(e^x)'}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = [\arcsin(e^x)]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2}$, ahol ismét csak a helyettesítéses integrálás alap összefüggését alkalmaztuk.

- $\int_e^{\frac{1}{e}} \mathrm{d}x \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$: Itt ismerjük fel, hogy a logaritmus tulajdonságainak köszönhetően egyszerűbb alakra hozható az integrandus, $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$, ezen felül ez egy $\int \mathrm{d}x f(x) f'(x) = \frac{1}{2}f^2 + C$ "típusú integrál",

azaz a helyettesítéses integrálás második speciális esetének felel meg az $f(x) = \ln(x)$ megfeleltetéssel és $n = 1$ esetben, vagyis az integrál végeredménye:

$$\int_e^{\frac{1}{e}} \mathrm{d}x \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} = \left[\frac{1}{4}\ln^2(x)\right]_e^{\frac{1}{e}} = 0.$$

2.8. Helyettesítéses integrálás, második verzió

Többször kényelmesebb, illetve könnyebb a feladatokat megoldani egy új változó bevezetésével:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x f(g(x))\, g'(x)$$
$$g \to y,\ y'\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y,\ f(y(x)) = f(y)$$
$$y_1 = y(x_1)\,,\ y_2 = y(x_2)$$

Tehát mostantól az $y(x) \equiv y$-ra mint új változóra, illetve $f(y(x)) = f(y)$-re mint y függvényére tekintünk.
Példák:

- $\int_0^{\pi^2} \mathrm{d}x \sin(\sqrt{x})$: Itt áttérünk az $y = \sqrt{x}$ új változóra, ekkor az integrálási mértékét a következő képpen tudjuk az új változó szerint felírni, kihasználva, hogy tudjuk, $x = y^2$.

  $$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y.$$

  Innen már könnyen felírhatjuk az eredeti integrált az új $y = \sqrt{x}$ változóval: $2\int_0^{\pi} \mathrm{d}y y \sin(y)$.
  Ezt az integrált már könnyen elvégezhetjük egy parciális integrálással, hiszen $(-\cos(y))' = \sin(y)$:

  $$2\int_0^{\pi} \mathrm{d}y y(-\cos(y))' = -2\left[y\cos(y)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}y \cos(y) = -2\left[y\cos(y)\right]_0^{\pi} + 2\left[\sin(y)\right]_0^{\pi}$$
  $$= 2\left[-\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right) + \sin\left(\sqrt{x}\right)\right]_0^{\pi^2} = 2\pi,$$

  ahol az utolsó lépésben visszaírtuk az eredeti $y = \sqrt{x}$ behelyettesítést!

- $\int \mathrm{d}x \frac{1}{1+\tan(x)}$: Itt érdemes új változónak bevezetni az $y = \tan(x)$-t, ahonnan $x = \mathrm{arctg}(y)$. Ismét felírva az integrált az új változó szerint, és elvégezve az integrálási mérték transzformációját, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = (\mathrm{arctg}(y))' = \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$. Így az integrál a következő alakot ölti: $\int \mathrm{d}y \frac{1}{1+y}\frac{1}{1+y^2}$, amit a parciális törtekre bontás módszerével oldhatunk meg.

Parciális törtekre bontás módszere (a fenti speciális esetben):
Belátható, hogy ekkor a fenti integrandus a következő alakban írható fel:

$$\frac{1}{1+y}\frac{1}{1+y^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{By+C}{1+y^2},$$

ahol az A, B, C konstans értékeket az alapján határozzuk meg, hogy a közös nevezőre hozás után a számlálóban az eredeti érték maradjon, azaz $\frac{1}{1+y}\frac{1}{1+y^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{By+C}{1+y^2}$. A közös nevezőre hozás után a következő számláló adódik, $A+C+(B+C)\,y+(A+B)\,y^2$, aminek azonosnak kell lennie 1-el. Ez a következő 3 ismeretlenes egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{aligned} A + C &= 1, \\ B + C &= 0, \\ A + B &= 0, \end{aligned}$$

aminek a megoldása: $A = C = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$. Vagyis azt kaptuk, hogy az integrandus a következőképpen bontható szét két tört összegére: $\frac{1/2}{1+y} - \frac{1}{2}\frac{1+y}{1+y^2}$. Ezt már könnyedén tudjuk integrálni, hiszen az első tag integrálja egyszerűen $\frac{1}{2}\ln(|1+y|)$, míg a másodiké:
$-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \frac{1-y}{1+y^2} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x \frac{\left(1+y^2\right)'}{1+y^2} = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(y) + \frac{1}{4}\ln\left(1+y^2\right)$.
Így összességében az integrál értéke:

$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{1+\tan(x)} = \frac{1}{2}\ln(|1+\tan(x)|) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln\left(1+\tan^2(x)\right) + C,$$

ahol az utolsó lépésben visszaírtuk az eredeti $y = \tan(x)$ behelyettesítést.

- $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \frac{e^x}{e^{2x}+1}$: Itt először bevezetjük az $y = e^x$ új változót, ahonnan az integrálási mérték a következő képpen fog módosulni: $x = \ln(x)$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Továbbá az integrálási határok is módosulnak, $y_1 = e^{x_1} = e^{-\infty} = 0$, $y_2 = e^{x_2} = e^0 = 1$. Vagyis az eredeti integrál az új változóval felírva következőképpen fog kinézni:
$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\frac{y}{1+y^2} = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{1}{1+y^2} = [\mathrm{arctg}(y)]_0^1 = [\mathrm{arctg}(e^x)]_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{4}$, ahol ismét visszahelyettesítettünk az $y = e^x$ változócsere alapján.
Vegyük észre, hog ezt a feladatot könnyedén meg tudtuk volna oldani a "hagyományos" módon is, ugyanis az integrandusra tekinthetünk úgy mint egy $f(g(x))\,g'(x)$ alakú kifejezésre, ahol $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = e^x$. Vagyis rögtön látszik, hogy $\int \mathrm{d}x \frac{(e^x)'}{1+(e^x)^2} = \mathrm{arctg}(e^x) + C$, ami éppen megegyezik az korábbi úton kapott eredményünkkel!

- $\int \mathrm{d}x \frac{1}{\sin(x)}$, itt ismét érdemes bevezetni új változónak az $y = \cos(x)$, illetve $x = \arccos(y)$, ahonnan a integrálási mérték az új változó szerint $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$, illetve $\sin(x) = \sqrt{1-y^2}$, ahonnan az integrál:

$-\int \mathrm{d}y \frac{1}{1-y^2} = \mathrm{artanh}(y) + C = -\mathrm{artanh}(\cos(\mathrm{x})) + C$.
Ismét megoldhatjuk egy másik úton ezt a példát: szorozzuk be mind a nevezőt, mind a számlálót $\sin(x)$-al, amiből adódik a következő integrál: $\int \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}$, most vegyük észre, hogy az integrandus ismét $f(g(x))\, g'(x)$ alakú, ahol $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, illetve $g(x) = \cos(x)$. Vagyis az integrál a következő alakban írható, amire alkalmazható a "hagyományos" helyettesítéses integrál:
$-\int \mathrm{d}x \frac{(\cos(x))'}{1-(\cos(x))^2} = -\mathrm{artanh}(\cos(x)) + C$, ami éppen megegyezik az előző részfeladatban kapott eredményünkkel!

"Fenman's trick"

Legyen az elvégzendő integrál a következő

2.1. Example.

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}. \tag{2.1}$$

Hogy ezt megoldjuk alkalmazhatunk egy $y = x + 1$ változócserét és egy pár parciális integrálást. Most ehelyett veszünk egy integrálfüggvényt a következő alakban[3]

$$I(\gamma) = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(\gamma x+1)}{1+x^2}. \tag{2.2}$$

, ahol most $\gamma \geq 0$. Látjuk hogy $I(\gamma = 1)$ esetben visszakapjuk az eredeti integrált amivel el akartunk bánni.

Differenciáljuk most $I(\gamma)$ függvényt γ szerint

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(\gamma x+1)}{1+x^2} \tag{2.3}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\frac{\partial \ln(\gamma x+1)}{\partial \gamma}}{1+x^2} \tag{2.4}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{1+x^2} \frac{x}{\gamma x+1} \tag{2.5}$$

Ezen a ponton az ilyen alakú integráloknál megszokott módon parciális törtekre bontjuk az integrandust.

$$\frac{1}{1+x^2} \frac{x}{\gamma x+1} = \frac{x}{(\gamma x+1)(x^2+1)} \tag{2.6}$$

$$= \frac{\gamma + x}{(\gamma^2+1)(x^2+1)} - \frac{\gamma}{(\gamma^2+1)(\gamma x+1)} \tag{2.7}$$

[3]Választhattuk volna $I(\gamma)$-t olyan integrandussal is mely a tradicionálisabb $x \to \gamma x$ változócserének megfelelő $f(x) = \frac{\gamma x+1}{1+\gamma^2 x^2}$ integrandust adja, csupán a későbbiekben ez megnehezítené a dolgunkat.

Láthatjuk, hogy mindkét törtben megjelenik egy az x-re történő integrál tekintetében konstans tag $\frac{1}{\gamma^2+1}$, amit kiemelhetünk az integrál elé

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{1}{\gamma^2+1}\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{-\gamma}{\gamma x+1} + \frac{\gamma}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\right) \tag{2.8}$$

Az így kapott integrált könnyedén elvégezhetjük

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma x+1|) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \gamma \arctan(x)\right]_0^1 \tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma+1|) + \frac{1}{2}\ln(2) + \gamma\frac{\pi}{4}\right] \tag{2.10}$$

Ez azonban $I(\gamma)$ deriváltjának eredménye, hogy megkapjuk a korábbi γ függő integrált, az előbbi kifejezést ki kell integrálnunk:

$$\int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = I(1) - I(0) \tag{2.11}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma+1|) + \frac{1}{2}\ln(2) + \gamma\frac{\pi}{4}\right] \tag{2.12}$$

$$= -\int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\ln(|\gamma+1|)}{\gamma^2+1} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} \tag{2.13}$$

$$= -I(1) + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} \tag{2.14}$$

$$2I(1) = \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} \tag{2.15}$$

$$= \frac{\ln(2)}{2}\arctan(x)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{4}\ln\left(\gamma^2+1\right)\frac{1}{2}\Big|_0^1 \tag{2.16}$$

$$= 2\frac{\ln(2)}{2}\frac{\pi}{4} \tag{2.17}$$

Innen pedig a megoldás már egyértelmű, hiszen

$$I \equiv I(1) = \frac{\ln(2)\pi}{8} \tag{2.18}$$

Összefoglalva az integrálási technika lépéseit:

1. Vezessünk be egy paraméteres integrálfüggvényt, amely az eredeti integrálást, az új változó szerinti differenciálás egyszerűbbé teszi

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x f(x) \to I(\gamma) = \int_a^b \mathrm{d}x \tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.19}$$

2. Deriváljuk le az új integrálfüggvényünket az új paraméter szerint

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \int_a^b \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.20}$$

3. Végezzük el x-re az integrált, majd integráljuk ki mindkét oldalt az új változó szerint

$$\int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = I(1) - I(0) = \int_0^1 \int_a^b \mathrm{d}\gamma \, \mathrm{d}x \, \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.21}$$

4. Rendezzük $I(1)$-re az így kapott kifejezést.

2.2. Example (Egy triviális példa[4]: $f(x) = x^3 - x$)**.**

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x x^3 - x \tag{2.22}$$

$$I(\gamma) = \int_a^b \mathrm{d}x \, \gamma^3 x^3 - \gamma x \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \int_a^b \mathrm{d}x \, 3\gamma^2 x^3 - x \tag{2.24}$$

$$= 3\gamma^2 \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \bigg|_a^b \tag{2.25}$$

$$= 3\gamma^2 \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.26}$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = I(1) - I(0) = \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \, 3\gamma^2 \frac{b^4 - a^4}{4} - \int_0^1 \mathrm{d}\gamma \, \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.27}$$

$$= \frac{3\gamma^3}{3} \bigg|_0^1 \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2} \gamma \bigg|_0^1 \tag{2.28}$$

$$I(1) = I = \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.29}$$

[4] Itt láthatjuk, hogy ha a függvényt $f(x) = x^3 - x + const.$ alakban adnánk meg, hogy a módszer rossz eredményre vezet, de ebben az esetben a konstans integrálását kezelhetjük külön integrálként.

3. Komplex számok

3.1. Bevezetés

Komplex egység:

$$i^2 = -1 \tag{3.1}$$

Komplex számok általánosan:

$z \in \mathbb{C}$, $z = a + b * i$, $a, b \in \mathbb{R}$
$Re\{z\} = a$, $Im\{z\} = b$, valós rész és képzetes rész,
$\overline{z} = a - b * i$, komplex konjugálás,
$z + \overline{z} = 2Re\{z\}$, $z - \overline{z} = 2Im\{z\}\, i$,
$r = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, komplex szám abszolút értéke, hossza,
$|z_1 z_2| = \left| r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$.

Komplex számok geometriai ábrázolása:

A komplex számokat ábrázolhatjuk 2 dimenziós Descartes-koordináta rendszerben, ahol a vízszintes tengelyen a valós rész, míg a függőleges tengelyen a képzetes rész nagyságát tüntetjük fel. Így bevezethetjük a komplex számokat jellemző *polárkoordinátákat*, ahol az origótól való távolság

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

illetve a vízszintes tengellyel bezárt szög (szokás nevezni fázisnak is)

$$\varphi = \frac{|b|}{b} \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Ekkor a komplex szám kifejezhető trigonometrikus alakban, mint

$$z = r\,(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \tag{3.2}$$

melynek Euler-féle alakja:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \to z = re^{i\varphi}. \tag{3.3}$$

Innen következik, hogy

$$|z_1\, z_2| = \left| r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right| = r_1\, r_2 = |z_1||z_2|. \tag{3.4}$$

Szokás az itt megjelenő exponenciális tagot is fázisnak nevezni.

3.1.1. Műveletek komplex számokkal

Legyen $z_1 = a + bi$, illetve $z_2 = c + di$. Ekkor a két komplex szám összegét a következőképp írhatjuk:

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d) \cdot i. \tag{3.5}$$

Tehát valós részt a valós résszel, képzetes részt a képzetes résszel adunk össze. Ugyanezen két szám szorzatára pedig a következő lesz igaz

$$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i \tag{3.6}$$

illetve Euler-alak esetén

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{3.7}$$

3.2. Feladatok

3.2.1. Összeadás és kivonás

$$(2 + 5i) + (4 - 3i) = (2 + 4) + (5 - 3)\, i = 6 + 2i \tag{3.8}$$

$$(3 - 4i) + (-5 + 2i) = (3 - 5) + (-4 + 2)\, i = -2 - 2i \tag{3.9}$$

$$\left(1 + \sqrt{3i}\right) - \left(\sqrt{2} - 4i\right) = \left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{3} + 4\right) i \tag{3.10}$$

$$(1 - i) - (4 - i) = (1 - 4) + (-1 + 1)\, i = -3 \tag{3.11}$$

$$\tag{3.12}$$

3.2.2. Szorzatok és hányadosok

$$(3 - 5i)(-4 + i) = -7 + 23i \tag{3.13}$$

$$(3 - 4i)(3 + 4i) = 25 \tag{3.14}$$

Érdekes összefüggés: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ (a középsikolából ismert összefüggés, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, analógiájára).

$$\frac{3 - 4i}{3 + 4i} = \frac{(3 - 4i)^2}{25} = \frac{7}{25} - \frac{24}{25}i \tag{3.15}$$

Itt bővítettünk a nevező komplex konjugáltjával, hogy a nevező tisztán valós legyen.

3.2.3. Algebrai és trigonometriai alak

Határozzuk meg az algebrai, illetve a trigonometrikus alakját az alábbi komplex számoknak:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - i \\ \text{Hossz: } r &= \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \\ \text{Szög: } \varphi &= -\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx -0.3217 \\ \text{Euler-alak: } z_1 &= \sqrt{10}e^{-0.3217i} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -2 - 3i \\ \text{Hossz: } r &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \\ \text{Szög: } \varphi &= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \approx 0.588 \\ \text{Euler-alak: } z_1 &= \sqrt{10}e^{-0.3217i} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Határozzuk meg most a $\frac{z_2}{\overline{z_1}}$ algebrai és trigonometrikus alakját. Az algebrai alakhoz, szorozzuk meg a nevezőt annak konjugáltjával, így a következőt kapjuk:

$$\frac{z_2 z_1}{|z_1|^2} = \frac{-9 - 7i}{10} = -\frac{9}{10} - \frac{7}{10}i \tag{3.18}$$

Az Euler-alakhoz szükségünk van a komplex számok abszolút értékére és a szögre:

$$r = \left|\frac{z_2}{\overline{z_1}}\right| = \frac{|z_2|}{|\overline{z_1}|} = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \sqrt{\frac{13}{10}},\ \varphi = -\arccos\left(-\frac{9}{\sqrt{130}}\right) = -2.48$$

Euler-alak:

$$\frac{z_2}{\overline{z_1}} = \sqrt{\frac{13}{10}}e^{-2.48i} \tag{3.19}$$

3.2.4. Algebrai alak

$\frac{1}{(3+4i)^2}$: Először kibontjuk a zárójelet a nevezőben, majd bővítünk a nevező komplex konjugáltjával:

$$\frac{1}{(1+4i)^2} = \frac{1}{-15+8i} = \frac{-15-8i}{289} = -\frac{15}{289} - \frac{8}{289}i \tag{3.20}$$

$\frac{2+i}{i(-3+4i)}$: Hasonlóan járunk el, először bővítünk a nevező komplex konjugáltjával:

$$\frac{2+i}{i(-3+4i)} = \frac{2+i}{-4-3i} = \frac{(2+i)(-4-3i)}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{10}{25}i \tag{3.21}$$

$\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$: Ahelyett, hogy először felbontjuk a nevezőben lévő zárójelt, rögtön bővítünk a nevező konjugáltjával:

$$\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2(1+i)}{20} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i \tag{3.22}$$

3.2.5. Trigonometrikus alak

$-\sqrt{3}-i$: először a hosszát adjuk meg: $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$, majd szöget: $\varphi = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\pi}{6}$. Innen a trigonometrikus alak:

$$-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \tag{3.23}$$

$-\sqrt{6}i$: Egyszerű, hiszen nincs valós rész, tehát a hossza egyszerűen $r = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + 0^2} = 6$, illetve a szög, mivel a szám a képzetes tengely negatív tartományában és a tengelyen rajta van, egyszerűen $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ A trigonometrikus alak is triviális:

$$-\sqrt{6}i = -\sqrt{6}i\sin(\pi/2) \tag{3.24}$$

-7: Hasonlóan triviális, csak most a képzetes rész zérus, tehát az abszolút érték egyszerűen $r = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$, illetve a szög, mivel a komplex szám a valós tengely negatív felén, a tengelyen helyezkedik el, $\varphi = \pi$. Innen a trigonometrikus alak:

$$-7 = 7\cos(\pi) \tag{3.25}$$

3.2.6. Abszolút érték számítás

$\left|\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}\right|$: Alkalmazzuk, hogy komplex számok szorzatának abszolut értéke az abszolut értékek szorzata, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Esetünkben tehát az eredmény $|3+4i||2+i|\left|\frac{1}{1+2i}\right|\left|\frac{1}{4+3i}\right|$, ahol alkalmazhatjuk a következő azonosságot $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right| = \frac{|\overline{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$. Vagyis az eredmény nem más mint tört kiszámítása úgy, hogy a benne szereplő komplex számokat az abszolut értékeikkel helyettesítjük:

$$\left|\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}\right| = \frac{5\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = 1 \tag{3.26}$$

$z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$: $\left|\frac{2z_2+z_1-5+i}{2z_1-z_2+3-i}\right|$: Használjuk a tudásunkat az előző esetről, vagyis hogy $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, ami alapján a kérdéses érték

$$\frac{|3-2i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{13}}{5} \tag{3.27}$$

3.2.7. Gyökvonás és hatványozás

$\sqrt[6]{1}$: A komplex számok körében minden $z \in \mathbb{C}$ komplex számnak n darab n-edik egységgyöke van. Ezt szemlélteti ez a példa is, hiszen, ha Euler alakba írjuk fel, $1 = e^{2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$, ahol kihasználtuk a komplex számok fázis szerinti 2π periodicitását, akkor látható, hogy a kérdéses érték $\sqrt[6]{1} \equiv e^{\frac{k}{6}2\pi i}$, ami $k \in \mathbb{Z}$ esetén 6 különböző értéket vesz fel, rendre

$$\begin{aligned}
k = 0,\ \sqrt[6]{1} &= 1 \\
k = 1,\ \sqrt[6]{1} &= e^{\frac{1}{6}2\pi i} \\
k = 2,\ \sqrt[6]{1} &= e^{\frac{2}{6}2\pi i} \\
k = 3,\ \sqrt[6]{1} &= e^{\frac{3}{6}2\pi i} \\
k = 4,\ \sqrt[6]{1} &= e^{\frac{4}{6}2\pi i} \\
k = 5,\ \sqrt[6]{1} &= e^{\frac{5}{6}2\pi i}
\end{aligned}$$

$\sqrt{i}$: Hasonlóan érdemes a triviális Euler-alakot felírni, figyelembe véve a 2π periodicitást, $i = e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}$. Majd véve a másdoik gyököt, két különböző eredmény adódik:

$$\begin{aligned}
k = 0,\ \sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\
k = 1,\ \sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i+\pi i} &= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$\sqrt[4]{-4}$: Hasonlóan járunk el, azzal a különbséggel, hogy most a gyök alatt szám nem a komplex egységkörön helyezkedik el, ezért először Euler alakba írjuk, amiben megjelenik az 1-től különböző abszolut értéke is, $-4 = 4e^{\pi i+2k\pi i}, k \in \mathbb{Z}$, ahol ismét kihasználtuk, hogy minden komplex szám a fázisában 2π szerint periódikus. Az abszolut érték gyökének kiszámításakor

csak a valós esetben megszokott értéket adjuk meg. Innen a megfelelő 4 gyök a következők:

$$
\begin{aligned}
k=0,\ \sqrt[4]{-4} &= \sqrt[4]{4}e^{\pi/4i} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)) = 1+i\\
k=1,\ \sqrt[4]{-4} &= \sqrt[4]{4}e^{3\pi/4i} = (-1+i)\\
k=2,\ \sqrt[4]{-4} &= \sqrt[4]{4}e^{5\pi/4i} = (-1-i)\\
k=3,\ \sqrt[4]{-4} &= \sqrt[4]{4}e^{7\pi/4i} = (1-i)
\end{aligned}
$$

$\sqrt[3]{i}$: Hasonlóan felírva Euler alakban és kihasználva a fázis 2π szerinti periodicitását, $i = e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}, k \in \mathbb{Z}$, a következő 3 gyök adódik:

$$
\begin{aligned}
k=0,\ \sqrt[3]{i} &= e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}+i}{2}\\
k=1,\ \sqrt[3]{i} &= e^{\frac{5\pi}{6}i} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\\
k=2,\ \sqrt[3]{i} &= e^{\frac{9\pi}{6}i} = -i
\end{aligned}
$$

$\sqrt[3]{2-2i}$: Ismét felírjuk Euler- alakba, figyelembe véve a 2π periodicitást, $2-2i = \sqrt{8}e^{-\frac{\pi}{4}i+2k\pi i}, k \in \mathbb{Z}$, illetve a abszolutértéknél egyszerűen véve a valós és pozitív köbgyököt, a következőt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
k=0,\ \sqrt[3]{2-2i} &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}e^{-\frac{\pi}{12}i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx \sqrt{2}(0.966-0.26i)\\
k=1,\ \sqrt[3]{2-2i} &= \sqrt{2}e^{\frac{7}{12}\pi i} \approx \sqrt{2}(-0.26+0.966i)\\
k=2,\ \sqrt[3]{2-2i} &= \sqrt{2}e^{\frac{15}{12}\pi i} = (-1-i)
\end{aligned}
$$

$\sqrt[5]{2+3i}$: Hasonló eljárásmód: Euler-alak, kiírva expliciten a 2π periodicitást egy tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ egész szám segítségével, $\sqrt[5]{2+3i} \approx \sqrt{13}e^{0.983i+2k\pi i}$, gyökvonás az abszolút értékből és véve annak a valós pozitív gyökét:

$$
\begin{aligned}
k=0,\ \sqrt[5]{2+3i} &\approx 0.997e^{0.197i} = 0.997(\cos(0.197)+i\sin(0.197)) = 0.977+0.195i\\
k=1,\ \sqrt[5]{2+3i} &\approx 0.997e^{0.197i+\frac{2\pi}{5}i} = -0.618+0.782i\\
k=2,\ \sqrt[5]{2+3i} &\approx 0.997e^{0.197i+\frac{4\pi}{5}i} = -0.935-0.346i\\
k=3,\ \sqrt[5]{2+3i} &\approx 0.997e^{0.197i+\frac{6\pi}{5}i} = 0.04-0.996i\\
k=4,\ \sqrt[5]{2+3i} &\approx 0.997e^{0.197i+\frac{8\pi}{5}i} = 0.96-0.27i
\end{aligned}
$$

$(1+i)^4$: Hatványozás, itt is érdemes előbb az Euler-alakot felírni, azonban most nem szükséges figyelmbe vennünk a $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ periodicitást, hiszen a hatványozás után (ha egész szám a hatvány kitevő) ez a periodicitás nem változik, $\left(e^{2k\pi i}\right)^n = e^{2kn\pi i} = 1$. Vagyis esetünkben $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, ahonnan

$$argu1 + i^4 = 4e^{\pi i} = -4$$

$\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)^8$: Ismét ez Euler-alakkal érdemes kezdeni, ehhez előbb azonban algebrai alakra kell hoznunk a komplex számot: $\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8 = e^{\frac{\pi}{4}i}$.
Most már könnyen felírhatjuk az Euler-alakot:

$$\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^8 = e^{2\pi i} = 1$$

$(1+2i)\,5-(1-2i)^5$: Mindent Euler alakba írunk és külön-külön végezzük el a hatványozást, ez azért érdemes megtenni, mert látható, hogy ugyananabból a komplex számból vonjuk ki a saját komplex konjugáltját, $z - \overline{z} = 2Im\{z\}\,i$ és $(\overline{z})^5 = \overline{z^5}$. Vagyis kiszámítva a $(1+2i)^5 \approx 5^{\frac{5}{2}}\left(e^{1.107i}\right)^5 = 41 - 38i$. Igazából a valós rész nem is érdekes, hiszen az úgy is kiesik, miután kivonjuk belőle a komplex konjugáltat is!
A végeredményhez tehát elég ismerni az egyik tag képzetes részét és így a végeredmény:

$$(1+2i)^5 - (1-2i)^5 = 2Im\left\{(1+2i)^5\right\} i = -76i$$

$\frac{(1+i)^6+(1-i)^6}{(1+i)^6(1-i)^6}$: Itt először kihasználjuk, hogy nevezőben éppen egy komplex szám és annak komplex konjugáltjának szorzata szerepel, $z\overline{z} = |z|^2$, továbbá a számlálóban egy komplex szám és annak komplex konjugáltjának összege szerepel. Vagyis az eredeti kifejezés a következő egyszerű alakot ölti:

$$\frac{(1+i)^6 + (1-i)^6}{(1+i)^6(1-i)^6} = \frac{2Re\left\{(1+i)^6\right\}}{2^6}, \tag{3.28}$$

azaz nincs más feladatunk, mint meghatározni az $(1+i)^6$ komplex szám valós részét, ehhez írjuk fel Euler-alakba, $(1+i) = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6 = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$, innen a valós rész, $Re\left\{(1+i)^6\right\} = 8\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, ahonnan a végeredmény is triviálisan nulla!

3.2.8. Egyenletek komplex számokkal

Komplex számokra felírt egyenletek esetén mindig *kettő egyenletet* kell megoldanunk, egyet a valós és egyet a képzetes részre. Más szavakkal az egyenlet

két oldalán mind a valós, mind a képzetes résznek meg kell egyeznie, úgy is mondhatjuk, hogy egy komplex szám képzetes részét nem tudjuk kifejezni egy másik komplex szám valós részével, a képzetes és valós tagok *algebrailag függetlenek*!

$3x + 2yi - ix + 5y = 7 + 5i$: Ahogyan fent kifejtettük, az egyetlen két oldalán mind a képzetes, mind valós részeknek meg kell egyezniük! Ez a következő két ismeretlenes egyenletrendszerre vezet:

$$3x + 5y = 7, \tag{3.29}$$
$$2y - x = 5. \tag{3.30}$$

$3 \times (2) + (1) = 11y = 22 \to y = 2$, ahonnan $(2) : x = -1$.

$z^2 - (3 + 4i)\, z + 1 + 5i = 0$: Itt egyszerűen alkalmazhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét, hiszen a komplex számok körében is két megoldást fogunk kapni, csupán annyi különbséggel, hogy most nem kell kizárnunk azokat az eseteket (ellenben középiskolás tanulmányainkkal), amikor negatív a diszkrimináns, vagyis alkalamzva a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$z_{1,2} = 1.5 + 2i \pm \sqrt{(1.5 + 2i)^2 - 1 - 5i} = 1.5 + 2i \pm \sqrt{-2.75 + i},$$

ahol csak meg kell határoznunk a fenti diszkrimináns négyzetgyökét:
$\sqrt{-2,75 + i} \approx \sqrt[4]{2.75^2 + 1} e^{2.793i} \approx -1.6 + 0.585i$, vagyis végeredmény:
$z_1 = -0.12.585i$, $z_2 = -3.1 + 1.415i$.

$2z^2 = -|z|^2 + i$: Ilyenkor érdemes az algebrai alakban keresni a kérdéses komplex számot, azaz $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, vagyis a fenti egyenlet ekkor:
$2(x + iy)^2 = -x^2 - y^2 + i \to 2x^2 - 2y^2 + 4xyi = -x^2 - y^2 + i \to -3x^2 + y^2 - 4xyi + i = 0$:
Mivel mind a valós, illetve mind a képzetes részeknek meg kell egyezniük, a következő két ismeretlenes egyenletrendszer adódik:

$$y^2 - 3x^2 = 0, \tag{3.31}$$
$$4xy = 1. \tag{3.32}$$

Az első egyenletből, (3), $y = \pm\sqrt{3}x$, ahonnan a második egyenlet alapján $\pm 4\sqrt{3}x^2 = 1 \to x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4\sqrt{3}}}$. Mivel $x, y, \in \mathbb{R} \to y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

$\frac{1}{2}|z| - z = 1 - i$: Itt érdemes mindent az abszolut értékes kifejezésre rendezni és négyzetre emelni az egyenlet mindkét oldalát, $\frac{1}{4}|z|^2 = (z + 1 - i)^2$. Ezt a kifejezést kifejtve, amikor $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, vagyis ekkor az $x + 1 + (y - 1)\, i$ kifejezést emeljük négyzetre, a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right) = (x + 1)^2 - (y - 1)^2 + 2(x + 1)(y - 1)\, i. \tag{3.33}$$

Az egyenletnek csak az egyik oldalán látható képzetes tag, aminek az együtthatójának így nullát kell adnia, vagyis $x = -1$ vagy $y = 1$:
$x = -1$: Így a valós részekre a kapott egyenelőség alapján: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}y^2 = -(y-1)^2$, ami semmilyen valós $y \in \mathbb{R}$ esetén nem lehetésges.
$y = 1$: A valós részekre kapott egyenlőség alapján: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2 = (x+1)^2 \to \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 2x + 1 \to \frac{3}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{4} = 0 \to x_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = -\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.
Vagyis a teljes megoldás: $x_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$, $y = 1$.

$z^2 + z = 1 - \overline{z}$: Ismét érdemes a $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ algebrai alakban keresni a megoldást.
Ekkor $z^2 + z = x^2 + x - y^2 + 2xyi + yi = 1 - x + yi$, ami a alábbi 0-ra rendezett egyenletre vezet:
$x^2 + 2x - 1 - y^2 + 2xyi = 0$. Ismét, mivel csak a $2xyi$ az egyetlen képzetes tag, $xy = 0$, ami két lehetséges megoldásra vezet, $x = 0$ vagy $y = 0$:
$x = 0$: Ekkor egyszerűen marad az $y^2 = -1 \to y_{1,2} = \pm i$, $x = 0$ a megoldás.
$y = 0$: Ekkor a maradék megoldandó egyenlet az $x^2 + 2x - 1 = 0 \to x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$, $y = 0$ a megoldás.

Egy trükkösebb feladat: $Im\{z + \frac{1}{z}\} = 0$ $Im\{z\} \neq 0$, $|z| = ?$
Érdemes ismét $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ módon paraméterezni az ismeretlen komplex számot és így $z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x+yi} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + \left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)i$, illetve a feltételünk miatt $y \neq 0 \leftrightarrow Im\{z\} \neq 0$, továbbá azt tudjuk, hogy $y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = y\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\right) = 0 \leftrightarrow Im\{z + \frac{1}{z}\} = 0$, ami a korábbi $y \neq 0$ feltétel miatt az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ összefüggésre vezet, ahonnan $|z|^2 = 1 \to |z| = 1$.

3.2.9. Egyenletrendszerek komplex számokkal

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$iz_1 - iz_2 + 2 = 0, \tag{3.34}$$
$$2z_1 + z_2 = i. \tag{3.35}$$

Hasonlóan járunk el, mint a "megszokott" valós egyenletrendszereknél, az egyenlő együtthatók módszerével eliminájuk a z_2 változót, a következő lineáris kombinációval: $(34) + i \times (35)$: $3iz_1 = -3$, ahonnan $z_1 = i$, visszahelyettesítve például a (35)-ös egyenletbe, a következőt kapjuk:
$2i + z_2 = i \to z_2 = -i$.

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$iz_1 + 2z_2 = 1 - 2i, \tag{3.36}$$
$$4z_1 - iz_2 = 3i - 1. \tag{3.37}$$

Most oldjuk meg úgy, hogy a (37)-es egyenletből kifejezzük z_2-t:
$z_2 = -3 - i - 4iz_1$, majd visszahelyettesítünk a (36)-os egyenletbe:

$-6-2i-7iz_1 = 1-2i \to z_1 = i$,
illetve $z_2 = -3-i+4 = 1-i$.

3.2.10. Komplex logaritmus, illetve komplex hatványkitevő

3.2.11. Komplex számok logaritmusa:

Érdemes itt ismét az Euler-alakot vizsgálni, $z = |z|e^{i\varphi+2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$, ahol ismét expliciten kiírtuk a fázis 2π periodicitását. Most vegyük a logaritmust, $\ln(z) = \ln\left(|z|e^{i\varphi+2k\pi i}\right) = \ln(|z|) + i\varphi + 2k\pi i$, vagyis a komplex számok körében *a logaritmus nem egyértelmű*, 2π periodicitást mutat. Emiatt a konvenció a következő $\ln(z) = \ln(|z|) + i\varphi + i\mathrm{mod}2\pi$, vagyis a $k = 0$-hoz tartozó logaritmus írjuk ki, de feltüntetjük, hogy a kapott mennyiség 2π periodikus!

- $\ln(\sqrt[3]{e})$: A szokásos módon a hatványkitevőt kihozzuk a logaritmus elé, majd a fentebb leírtak alapján kiszámítjuk a logaritmust a komplex számok körében, ahol most $e = ee^{2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
  A logaritmus ezekután egyszerűen $\ln(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3} + 2k\pi i$, avagy a konvencióval $\ln(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3} + i\mathrm{mod}2\pi$.

- $\ln\left(\sqrt{3}-i\right)$: Mint korábban is, legcélravezetőbb átírni a logaritmus argumentumát Euler-alakba, $\sqrt{3}-i = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}e^{-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$. Innen a komplex logaritmus egyszerűen $\ln(z) = \ln(|z|) + i\varphi + \mathrm{mod}2\pi i = 2 + \frac{\pi}{6}i + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- $\ln\left(\sqrt{i}e^{i\pi}\right)$: Komplex számok szorzatának logaritmusa uganúgy a logaritmusok összege, mint a "megszokott" valós esetben, vagyis $\ln\left(\sqrt{i}e^{i\pi}\right) = \frac{1}{2}\ln(i) + \ln\left(e^{i\pi}\right)$.
  Az első tagot Euler alakba írva, $\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = \frac{\pi}{2}i + \mathrm{mod}2\pi$, a végeredmény egyszerűen adódik:
  $\ln\left(\sqrt{i}e^{i\pi}\right) = \frac{5\pi}{4}i + \mathrm{mod}2\pi$.

3.2.12. Komplex hatványkitevő:

Ugyanúgy működik, mint valós esetben, de hogy szabályszerűen el tudjuk végezni, mindig érdemes az Euler-alakból kiindulni. Ha egy $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ komplex számot valós hatványra emelünk, a "szokásos módon" kell eljárni, ahogyan tettük a gyökvonás és egyész számmal való hatványozás során. Újdonság azonban, ha a hatványkitevő képzetes, vagyis a $z^{bi} = \left(re^{i\varphi}\right)^{bi}$ eset, ekkor a valós hatványozás szabályait követve a tagokat külön-külön hatványozzuk, $z^{bi} = r^{bi}e^{i\varphi bi} = r^{bi}e^{-b\varphi}$. Kérdés, hogy miként értelmezhetjük az r^{bi} tagot. Ha exponenciális alakba írjuk az abszolut értéket, $r = e^{\ln(r)}$, akkor a hatványozás elvégzése után éppen az Euler-alakra jutunk, $r^{bi} = e^{\ln(r)bi} = \cos(\ln(r)\,b) + i\sin(\ln(r)\,b)$.

3.2.13. extra feladatok:

- e^z : ahol $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Egyszerű a helyzet ugyanis $e^{x+yi} = e^x(\cos(x) + \sin(y))$. Vagyis $|e^z| = e^{Re\{z\}}$, illetve $\varphi = Im\{z\}$.

- $\sin(z)$, ahol $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$: Írjuk ki a szinusz függvény exponenciális definícióját, $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, ahonnan már könnyű dolgunk van, hiszen $iz = ix - y$, visszaírva ezt a szinusz kifejezésébe, $\sin(z) = \frac{e^{-y+xi} - e^{y-xi}}{2i}$. Érdekes megnézni, hogy ugyanezt kapnánk, ha vennénk az $-i\sinh(iz)$ kifejezést, hiszen ez nem más mint, definíció alapján, $\frac{e^{-y+xi} - e^{y-xi}}{2i} \equiv \sin(z)$.

- i^i: Egyszerűen csak fel kell írnunk a képzetes egységet Euler-alakba, $i^i = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

- $(3)^{3i}$: A fentebb elmondottak alapján, érdemes egy epxonenciális kifejezésként felírni, $(3)^{3i} = \left(e^{\ln(3)}\right)^{3i} = e^{3i\ln(3)} = \cos(3\ln(3)) + i\sin(3\ln(3))$.

- $\left(\frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{1+i}$: Ismét érdemes rögtön az Euler alakot felírni majd elvégezni a "valós szám képzetes hatványon" és "komplex fázis képzetes hatványon típusú" hatványozásokat:
$\left(\frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{i+1} = \left(ee^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{i+1} = e^{1+i}e^{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}i}$. Az utolsó feladatunk, hogy szeparáljuk a megfelelő tagokat és megkapjuk a végleges Euler-alakot:
$e^{1-\frac{\pi}{4}}e^{\left(1+\frac{\pi}{4}\right)i} = e^{1-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right)$, ahol az utolsó lépésben expliciten kiírtuk a trigonometrikus alakot.

4. Vektortér, Vektor algebra

4.1. Definíció:

V vektortér a $\mathbb{K} \equiv \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ számtest felett: $\underline{u}$, $\underline{v} \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$:

- $a\,\underline{v} + b\,\underline{u} \in V$ - Linearitás.
- $(a+b)(\underline{a} + \underline{b}) = a\,\underline{v} + b\,\underline{u} + a\,\underline{u} + b\,\underline{u} \in V$ - Disztributivitás mindkét irányban.
- $\exists!\,\underline{0} \in V$: $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$, $\forall\,\underline{v} \in V$ - A vektortér nulleleme.
- $\exists -\,\underline{v} \in V$: $-\,\underline{v} + \underline{v} = \underline{0} \in V$ - Inverz elem.
- $\exists! 1 \in \mathbb{K}$: $1\,\underline{v} \in V$ - Számtest egységeleme.

4.2. Lineáris függetlenség:

$\{\,\underline{v}_i\}_{i=1}^n$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i\,\underline{v}_i = 0 \leftrightarrow \lambda_i = 0$, $\forall i = 1 \ldots n$.

4.3. Bázis:

$\{\,\underline{v}_i\}_{i=1}^n$ bázis V vektortérben, ha lineárisan független és nem bővíthető tovább.
Példa: $\mathbb{R}^3$: $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$, illetve $\mathbb{R}^2$: $\underline{i}$, $\underline{j}$. Bázis elemszáma $\equiv \dim(V)$ a vektrotér dimenziószáma.
Miért rendelkezik olyan kitüntetett szereppel a bázis? A bázis elemeinek lineáris kombinációjával a vektortér minden eleme/vektora megadható!
Példák:

- Legyen V-ban bázis az $\{\,\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, ekkor $\forall v \in V$ esetén *egyértelműen létezik* olyan $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}$, hogy $\underline{v} = v_1\,\underline{e}_1 + v_2\,\underline{e}_2 + v_3\,\underline{e}_3$. Figyelem: $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ nem biztos, hogy merőlegesek, illetve hogy hosszuk egységnyi!
- $\mathbb{R}^3$-ban bázist alkotnak a Descartes-koordinátarendszer egységvektorai, $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$, vagyis minden
  $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$-hez *egyértelműen léteznek* olyan $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{v} = v_1\,\underline{i} + v_2\,\underline{j} + v_3\,\underline{k}$.

4.4. Skaláris szorzat:

A vektortér önmagával vett Descartes szorzatából képez le a számtestbe:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

Tulajdonságai:

- Szeszkvilineáris (valós esetben bilineáris): $\langle \lambda\, \underline{v},\, \underline{u}\rangle = \lambda^* \langle \underline{v},\, \underline{u}\rangle$, $\langle \underline{v},\, \underline{\lambda} u\rangle = \lambda \langle \underline{v},\, \underline{u}\rangle$, azaz első változóban konjugáltan lineáris, míg a második változójában lineáris.

- Konjugált szimmetrikus (valós esetben szimmetrikus): $\langle \underline{v},\, \underline{u}\rangle = \langle \underline{u},\, \underline{v}\rangle^*$.

- Pozitív definit $\langle \underline{u},\, \underline{u}\rangle \geq 0$, $\langle \underline{u},\, \underline{u}\rangle = 0 \leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$.

- $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2,\, \underline{u}\rangle = \langle \underline{v}_1,\, \underline{u}\rangle + \langle \underline{v}_2,\, \underline{u}\rangle$, illetve $\langle \underline{v},\, \underline{u}_1 + \underline{u}_2\rangle = \langle \underline{v},\, \underline{u}_1\rangle + \langle \underline{v},\, \underline{u}_2\rangle$

- Fontos (!!!): A skaláris szorzat nem asszociatív: $\underline{a} \cdot \langle \underline{b},\, \underline{c}\rangle \neq \langle \underline{a} \cdot \underline{b}\rangle \cdot \underline{c}$

4.5. Geometriai definíció (most speciálisan $\mathbb{R}^3$-ban):

$\langle \underline{v}_1,\, \underline{v}_2\rangle = |\underline{v}_1||\underline{v}_2|\cos(\varphi(\underline{v}_1,\, \underline{v}_2))$, ahol $\varphi(\underline{v}_1,\, \underline{v}_2)$ a két vektor által bezárt szög.

4.6. Skaláris szorzat bázisban, most speciálisan $\mathbb{R}^2$-ben:

$\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\underline{w} = (w_1, w_2)$ valamilyen bázisban, ekkor a skaláris szorzat tulajdonságai alapján $\langle \underline{v},\, \underline{w}\rangle = \langle v_1\, \underline{e}_1 + v_2\, \underline{e}_2, w_1\, \underline{e}_1 + w_2\, \underline{e}_2\rangle = v_1 w_1 \langle \underline{e}_1,\, \underline{e}_1\rangle + v_1 w_2 \langle \underline{e}_1,\, \underline{e}_2\rangle + v_2 w_1 \langle \underline{e}_2,\, \underline{e}_1\rangle + v_2 w_2 \langle \underline{e}_2,\, \underline{e}_2\rangle$.
Ha $\left\langle \underline{e}_i,\, \underline{e}_j\right\rangle =$
1 , ha i=j
0 , ha i$\neq$ j,
azaz a bázisvektorok ortonormálisak, akkor visszakapjuk a jól ismert középsikolai eredméynt, $\langle \underline{v},\, \underline{w}\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$.

4.7. Feladatok:

- Legyen $\underline{a} = (1, 5, 2)$, $\underline{b} = (-2, 1, 2)$:
  $\underline{a} + \underline{b} = (-1, 6, 4)$, $\underline{a} - \underline{b} = (3, 4, 0)$, $3\,\underline{a} = (3, 15, 6)$, $-\frac{1}{2}\,\underline{b} = \left(-1, \frac{1}{2}, 1\right)$, ahol egyszerűen minden műveletet komponensenként végeztünk el, illetve nem mondtuk ki, hogy milyen bázisban dolgozunk(!). Ha sakárszorzatot is ki kellett volna számolnunk, akkor lett volna csak szükség a bázis specifikálására!

- $\underline{v}_1 = (1, 3, 2)$, $\underline{v}_1 = (-3, 1, 2)$:
  $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 4$.
  $|\underline{v}_1| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, $|\underline{v}_1| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, $\cos(\varphi) = \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{|\underline{v}_1||\underline{v}_2|} = \frac{4}{14}$.

- Legyen $\underline{a} = (3, 1, -1)$, $\underline{b} = (3, 4, 12)$. Határozzuk meg a két vektor átlal bezárt szöget:
  A szokásos módon előszö a koszinuszt adjuk meg a skaláris szorzás

segítségével: $\cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b})) = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}$.
$|\underline{a}| = \sqrt{11}$, $|\underline{b}| = 13$, illetve $\underline{a}\cdot\underline{b} = 1$, ahonnan $\cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b})) = \frac{1}{13\sqrt{11}} \to \varphi = 1.547$.

- Lineáris függetlenség: függetlenek-e az $\underline{a} = (2, -2)$ és a $\underline{b} = (1, 2)$ vektorok, ismét a bázis megválasztás nem fontos, a kérdés az, hogy tudunk-e olyan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ számokat találnunk, hogy $\lambda_1\,\underline{a} + \lambda_2\,\underline{b} = 0$ úgy, hogy $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Mint mindig most is kompenensenként írjuk ki a megfelelő egyenlőséget:

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{4.1}$$
$$-2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \tag{4.2}$$

(4) $\to \lambda_1 = -\lambda_2$, amit visszaírva az első egyenletbe, $\lambda_1 = 0$,$\lambda_2 = 0$ adódik, tehát $\underline{a}$ és $\underline{b}$ függetlenek.
Megjegyzés: ha csak két vektorunk van, elég lecsekkolni, hogy létezik-e olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{a} = \lambda\,\underline{b}$,

- Függetlenek-e egymástól a fenti $\underline{a}$, $\underline{b}$ és a $\underline{c} = (8, 4)$ vektorok. A válasz az, hogy nyilván nem, hiszen csak két komponensünk van, de három vektorunk, ekkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$-re úgy is tekinthetünk mint bázisra, hiszen maximálisan lineárisan független rendszert alkotnak, a kérdés tehát úgy is feltehető, hogy mik a $\underline{c}$ vektor kifejtési együtthatói ebben a bázisban. Ismét komponensenként érdemes felírni a $\underline{c} = \lambda_1\,\underline{a} + \lambda_2\,\underline{b}$-ből fakadó egyenlőségeket:

$$8 = 2\lambda_1 + \lambda_2, \tag{4.3}$$
$$4 = -2\lambda_1 + 2\lambda_2. \tag{4.4}$$

Összeadva két egyenletet, azt kapjuk, hogy $\lambda_2 = 4$, ahonnan $\lambda_1 = 2$.

- Ha két vektor skalárszorzata zérus, akkor a vektorok merőlegesek egymásra! Legyen $\underline{a} = (3, -1, 2)$ és $\underline{b} = (2, 5, \lambda)$. Hogyan válasszuk meg λ értékét, hogy a két vektor merőleges legyen egymásra. Ehhez írjuk fel a λ paraméter segítségével a skaláris szorzatot, ahol λ értékét úgy kell megválasztanunk, hogy a skaláris szorzat nulla legyen:

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = 6 - 5 + 2\lambda = 0 \to \lambda = -\frac{1}{2}.$$

- Legyen $\underline{a} = (2, 0, -1)$, $\underline{b} = (3, -2, 1)$, határozzuk meg a két vektor által bezárt szöget. Mint tudjuk a vektorok hosszával és bezárt szögével a következő képp fejezhető ki a skaláris szorzat, $\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b})) = 5$, ahol az utolsó egyenlőség a komponensekből számolt skaláris szorzatból következik, a hosszúságok pedig $|\underline{a}| = \sqrt{5}$, $|\underline{b}| = \sqrt{14}$. Innen a bezárt szög koszinusza egyszerűen $\cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b})) = \frac{5}{\sqrt{70}}$, ahonnan a szög $\varphi(\underline{a}, \underline{b}) \approx 0.93$.

- Adott vektorra való vetítés, arra merőleges vektor meghatározása stb.
  - Határozzuk meg az $\underline{a} = (5, -3, 1)$ irányába mutató egységvektort. Ilyenkor nincs más dolgunk, mint leosztani a vektort a saját hosszával, ahol most feltesszük, hogy Descartes-koordináta rendszerben dolgozunk, azaz $|\underline{a}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{35}$. Vagyis $\underline{n}_a = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(5, -3, 1)$.
  - Legyen $\underline{b} = (2, 1, 3)$, adjuk meg a $\underline{b}$-nek $\underline{a}$-val párhuzmos komponensének hosszát.
    Ehhez venünnk kell a két vektor által bezárt szöget és megszoroznunk $|\underline{b}|$-vel. Későbbiekben hasznos lesz a következő egyszerű módszer használata:
    $b_{\|} = \underline{n}_a \cdot \underline{b}$, ugyanis ez nem mással egyenlő, $\underline{n}_a$ definíciója alapján, mint $\underline{n}_a \cdot \underline{b} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|} = \cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b}))\,|\underline{b}|$. Vagyis $\underline{b}_{||} = \underline{n}_a b_{\|} = \frac{2}{7}(5, -3, 1)$.
    Most határozzuk meg az $\underline{a}$-ra merőleges komponenst, $\underline{b}_{\perp}$. Ehhez felhasználjuk, hogy $\underline{b} = \underline{b}_{\|} + \underline{b}_{\perp}$, vagyis $\underline{b}_{\perp} = \underline{b} - \underline{b}_{\|}$. Ami a koordináták alapján nem más mint
    $$\underline{b}_{\perp} = (2, 1, 3) - \frac{2}{7}(5, -3, 1) = \frac{1}{7}(4, 13, 19)\,.$$
  - Legyen $\underline{a} = (-2, 6, 1)$ és $\underline{b} = (1, -1, 0)$. Határozzuk meg ismét a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$-ra merőleges és azzal párhuzamos komponenseit. Ehhez előrször ismét adjuk meg az $\underline{a}$ irányába mutató egységvektort, $\underline{n}_a = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{1}{\sqrt{41}}(-2, 6, 1)$. Most a párhuzamos komponens $\underline{b}_{\|} = (\underline{n}_a \cdot \underline{b})\,\underline{n}_a = \frac{-10}{41}(-2, 6, 1)$. Innen pedig a merőleges komponens: $\underline{b}_{\perp} = \underline{b} - \underline{b}_{\|} = (1, -1, 0) - \frac{10}{41}(-2, 6, 1) = \frac{1}{41}(61, -101, -10)$.
- Geometriai feladatok:
  Adott egy háromszög, melynek csúcsai a csúcspontokba mutató helyvektorok koordinátátival együtt A, $\underline{r}_A = (2, -5, 1)$; B, $\underline{r}_B = (6, -3, 5)$; C, $\underline{r}_C = (6, -4, 9)$.
  - Határozzuk meg a háromszög szögeit.
    Ehhez először megadjuk a csúcsok közötti vektorokat: $\vec{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = (4, 1, 8)$, $\vec{AB} = \underline{r}_B - \underline{r}_A = (4, 2, 4)$, $\vec{BC} = \underline{r}_C - \underline{r}_B = (0, -1, 4)$. Ekkor a kérdéses szögek koszinuszai egyszerűen származtathatóak a megszokott módon a skaláris szorzat és a vektorok hosszának ismeretében. Először a vektorok hosszait adjuk meg: $\left|\vec{AC}\right| = 9$, $\left|\vec{AB}\right| = 6$, $\left|\vec{BC}\right| = \sqrt{17}$.
    Ezek alapján a megfelelő szögek:
    $\cos\left(\varphi\left(\vec{AC}, \vec{AB}\right)\right) \equiv \cos(\alpha) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{50}{54} \to \alpha = 0.387$.

$\cos\left(\varphi\left(\vec{BC}, \vec{BA}\right)\right) \equiv \cos(\beta) = \frac{\vec{BC}\cdot\vec{BA}}{|\vec{BC}||\vec{BA}|} = \frac{-14}{6\sqrt{17}} \to \beta = 2.17.$
$\cos\left(\varphi\left(\vec{CB}, \vec{CA}\right)\right) \equiv \cos(\gamma) = \frac{\vec{CB}\cdot\vec{CA}}{|\vec{CB}||\vec{CA}|} = \frac{31}{9\sqrt{17}} \to \gamma = 0.582.$
Ahol mindenütt kihasználtuk, hogy $\vec{AC} = -\vec{CA}$, illetve hasonlóan $\vec{AB} = -\vec{BA}$, $\vec{BC} = -\vec{CB}$.

4.7.1. Vektorok keresztszorzata/vektoriális szorzata:

$\times$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ellenben a skaláris szorzattal ennek a műveletnek csak $\mathbb{R}^3$-ban van értelme.
Geometriai definíció: $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ esetén a $\underline{v} = \underline{a} \times \underline{b}$ merőleges mind az $\underline{a}$, mind a $\underline{b}$ vektorokra és a hossza $|\underline{v}| = |\underline{a}||\underline{b}|\sin(\varphi(\underline{a}, \underline{b}))$. A definícióból is látható, hogy ez nem mást ad meg, mint az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített paralelogramma területét.
A keresztszorzás tulajdonságai:

- $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$, jobbkéz szabály alapján lehet meghatározni. - Antikommutatív:
- $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$. -összeadásra disztributív.
- $\lambda\,\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times \lambda\,\underline{b}$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ esetén-számmal való szorzásra asszociatív.
- $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \neq (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$. -nem asszociatív!

Kiszámítása Descartes koordinátarendszerben, az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisvektorok segítségével.
A definícióból és jobbkéz szabályból következően a következő egyenlőségek igazak a Descartes koordináta rendszer ortonormált bázisvektoraira:

- $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{0}$
- $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$, $\underline{j} \times \underline{j} = \underline{0}$
- $\underline{k} \times \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$

Ez alapján két tetszőleges vektor vektoriális szorzata a következő: $\underline{a} \times \underline{b} = \left(a_1\,\underline{i} + a_2\,\underline{j} + a_3\,\underline{k}\right) \times \left(b_1\,\underline{i} + b_2\,\underline{j} + b_3\,\underline{k}\right) = a_1b_1\,\underline{i} \times \underline{i} + a_1b_2\,\underline{j} \times \underline{i} + a_1b_3\,\underline{i} \times \underline{k} + a_2b_1\,\underline{j} \times \underline{i} + a_2b_2\,\underline{j} \times \underline{j} + a_2b_3\,\underline{j} \times \underline{k} + a_3b_1\,\underline{k} \times \underline{i} + a_3b_2\,\underline{k} \times \underline{j} + a_3b_3\,\underline{k} \times \underline{k} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\underline{k} \equiv (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.
Alternatív kiszámítási mód: 3×3-as determináns segítségével: $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ Legyen $\underline{a} = (2, -2, -3)$, illetve $\underline{b} = (0, 4, 7)$, adjuk meg a keresztszorzatukat:
Behelyettesítve a fentebb írt képletbe, egyszerűen adódik az eredmény:

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \equiv (-2, -14, 8)\,.$$

Adott egy háromszög, melynek csúcsai a megfelelő helyvektorokkal együtt a következők:
A, $\underline{r}_A = (1, -1, 1)$; B, $\underline{r}_B = (2, 1, -1)$; C, $\underline{r}_C = (-1, -1, -2)$. A keresztszorzás segítségével határozzuk meg a háromszög területét. Mint tudjuk az $|\underline{a} \times \underline{b}|$ vektorhossz a két vektor által kifeszített paralelogramma területével egyenlő, vagyis ennek a fele éppen a két vektor által alkotott háromszög területével egyenlő. Vagyis az ABC hárosmzög területéhez ki kell számítanunk az $\left|\vec{AC} \times \vec{AB}\right|$ értéket. Ehhez a megfelelő vektorok $\vec{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = (-2, 0, -3)$, $\vec{AB} = \underline{r}_B - \underline{r}_A = (1, 2, -2)$. Innen egyszerűen a keresztszorzat, ismét alkalmazva az ismert képletet:
$T_{ABC} = \left|\vec{AC} \times \vec{AB}\right|/2 = |(-6, -1, 4)|/2 = \frac{\sqrt{53}}{2}$.

4.7.2. Vegyes szorzat:

Vegyes szorzat alatt a következőt érjük: $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$
Legyen $\underline{a} = (2, -2, 5)$, $\underline{b} = (-1, 2, 2)$, $\underline{c} = (0, 2, -3)$, határozzuk meg az $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ vegyes szorzatot. A kiszámítási szabály alapján $\underline{b} \times \underline{c} = (-10, -3, -2) \rightarrow \underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}) = -20 + 6 - 10 = -24$.
Számítsuk most ki a $(\underline{b}, \underline{c}, \underline{a})$ vegyes szorzatot, ehhez először meg kell mondanunk a $\underline{c} \times \underline{a}$ keresztszorzat értékét, $(c_2a_3 - c_3a_2, c_3a_1 - c_1a_3, c_1a_2 - c_2a_1) = (-4, -6, -4)$.
Ezt követően a skaláris szorzás eredménye pedig $(\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}) = (-1) \cdot (-4) + (-6) \cdot 2 + (-8) \cdot 2 = -24$, vagyis ugyanaz az érték mint az előző esetben, ez is mutatja azt az általános igazságot, hogy a vegyes szorzat értéke nem változik, ha a vektorokat benne ciklikusan permutáljuk, illetve -1-eresére változik, ha nem ciklikus permutációt hatjunk végre:
$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{c}, \underline{a})$, illetve $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = -(\underline{a}, \underline{c}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}) = (\underline{c}, \underline{b}, \underline{a})$.

4.7.3. Indexes számolás:

- Kronecker-delta:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ ha } i = j \\ 0, \text{ ha } i \neq j \end{cases} \tag{4.5}$$

- Levi-Civita szimbólum:

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, \text{ ha } (i,j,k) \text{ az } (1,2,3) \text{ ciklikus permutációja} \\ -1, \text{ ha } (i,j,k) \text{ az } (1,2,3) \text{ nem ciklikus permutációja} \\ 0, \text{ ha } (i,j,k) \text{ az } (1,2,3)\text{-nak nem permutációja} \end{cases} \tag{4.6}$$

- Példák:
  $\varepsilon_{1,3,2} = -1$, mert $(1,3,2)$ nem ciklikus permutációja $(1,2,3)$-nak. Hasonlóan $\varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1$.
  $\varepsilon_{3,1,2} = 1$, mert $(3,1,2)$ ciklikus permutációja $(1,2,3)$-nak. Hasonlóan $\varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon_{2,3,1} = 1$.
  $\varepsilon_{1,1,2} = 0$, mert $(1,1,2)$ nem permutációja $(1,2,3)$-nak.

- Skaláris szorzat Kronecker-delta segítségével:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} v_i \delta_{i,j} w_j = \sum_{i=1}^{3} \delta_{i,i} v_i w_i = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i, \tag{4.7}$$

  mivel minden $i \neq j$ esetén $\delta_{i,j} = 0$, egyébként meg $\delta_{i,i} \neq 0$, illetőleg azonosan eggyel egyenlő.

- Vektoriális szorzat Levi-Civita szimbólum segítségével:

$$(\underline{v} \times \underline{w})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} v_j w_k.$$

- Fontosabb indexes összefüggések:
  $\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,l} = 2\delta_{k,l}$
  $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{i,l,m} = \delta_{j,l}\delta_{k,m} - \delta_{j,m}\delta_{k,l}$
  Einstein konvenció: ha egy index kétszer fordul elő automatikusan úgy kell érteni, hogy összegzünk arra az indexre, tehát fölösleges a szumma kiírása!

- Példák:

$$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \delta_{i,k} \varepsilon_{k,l,m} a_j b_j c_l d_m.$$

  Mivel a Kronecker-delta indexeinek meg kell egyezniük, nás különben nillát adnak $\delta_{i \neq k} = 0$, az összegzésben $k = i$-t kapunk, ahonnan $\sum_{j,l,m=1}^{3} \varepsilon_{i,l,m} a_j b_j c_l d_m = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{i,l,m} c_l d_m$. Itt az első szumma eredménye egyszerűen csak a $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzata, illetve a másdoik szumma éppen a $c \times d$ keresztszorzat i-ik komponense, vagyis az eredmény:

$$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \delta_{i,k} \varepsilon_{k,l,m} a_j b_j c_l d_m = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle (\underline{c} \times \underline{d})_i .$$

  Számítsuk ki a következő szummát:

$$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \delta_{k,m} \delta_{j,m} \varepsilon_{l,m,n} c_k d_m.$$

Itt ismét először kihasználjuk, hogy a Kronecker-delták indexeinek meg kell egyezniük, vagyis az összegzésben csak azo ka tagok nem fognak eltűnni, ahol $k = m$ és $j = m$, ahonnan már csak egy két indexre való szummázást kell elvégeznünk:

$$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \delta_{k,m}\delta_{j,m}\varepsilon_{l,m,n}c_k d_m. = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{l,m,n}c_m d_m,$$

ahol az utolsó tagra gondolhatunk úg, mint egy vektor melynek az m-edik eleme a $c_m d_m$, illetve megjelenik mellette a csupa egyest tartalmazó vektor, hiszen ekkor ha $\underline{f}^T = (1,1,1)$, akkor $f_n = 1$, ahonnan

$$\sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{l,m,n}c_m d_m f_n = \left(\underline{g} \times \underline{f}\right)_l,$$

ahol $g_m = c_m d_m$.
Indexes számolás a hármas vektoriális szorzat kiszámításához:
$(\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}))_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j (\underline{b} \times \underline{c})_k = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k}\varepsilon_{k,l,m} a_j b_l c_m = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{k,i,j}\varepsilon_{k,l,m} a_j b_l c_m$. Itt az utolsó lépést azért tehettük meg, mert a Levi-Civita szimbólum inexei egymás között, a definíció alapján, ciklikusan permutálhatóak, továbbá ebben az alakban alkalmazható rájuk a fentebb írt azonosság, vagyis a következő adódik:
$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} (\delta_{j,l}\delta_{k,m} - \delta_{j,m} - \delta_{k,l})\, a_j b_l c_m = \sum_{m=1}^{3} b_i a_m c_m - \sum_{j=1}^{3} c_i a_j b_j = (\underline{c} \cdot \underline{a})\, b_i - (\underline{a} \cdot \underline{b})\, c_i$, ahol most csak az i-edik komponensre vezettük le az egyenlőséget, de mivel láthatóan semmi nem függött a komponens megválasztásától, minden $i = 1, 2, 3$ esetén is igaz az állítás, vagyis

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\, \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\, \underline{c}.$$

Két vektoriális szorzat skalráis szorzata:

$$\langle\!\langle \underline{a} \times \underline{b}), (\underline{c} \times \underline{d}) \rangle\!\rangle$$

Itt előrször kiiírjuk a skaláris szorzás Korncker-deltás verzióját, $\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i,j} (\underline{a} \times \underline{b})_i (\underline{a} \times \underline{b})_j$, majd kiírjuk a két keresztszorzat megfelelő komponenseit:

$$\sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} \delta_{i,j}\varepsilon_{i,k,l}\varepsilon_{j,m,n} a_k b_l c_m d_n,$$

majd egybeejtjük a Kroncker-delta két indexét, $i = j$-re végezzük el az összegzést, $\sum_{i,k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{i,k,l}\varepsilon_{i,m,n} a_k b_l c_m d_n$, amit átírhatunk a két Levi-Civita szimbólum szorzatánál tanult összefüggés alapján, $\sum_{k,l,m,n=1}^{3} (\delta_{k,m}\delta_{l,n} - \delta_{k,n}\delta_{l,m})\, a_k b_l c_m d_n$. Ezt az összegzést már könnyen el tudjuk végezni ha egybeejtjük a következő indexeket $k \to m$, $l \to n$,

illetve a második tagban, $k \to n$, $l \to m$. Innen a végső két indexre felírt összegzés a következő:

$$\sum_{m,n=1}^{3} a_m b_n c_m d_n - a_n b_m c_m d_n = \left(\sum_{n=1}^{3} b_n d_n\right)\left(\sum_{m=1}^{3} a_m c_m\right) - \left(\sum_{n=1}^{3} a_n d_n\right)\left(\sum_{m=1}^{3} b_m c_m\right)$$
$$= \langle \underline{a}, \underline{c}\rangle \langle \underline{b}, \underline{d}\rangle - \langle \underline{b}, \underline{c}\rangle \langle \underline{a}, \underline{d}\rangle .$$

Hármas vektoriális szorzat skalárszorzate egy negyedik vektorral:

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{d})\rangle .$$

Először kiírjuk a skaláris szorzatot a Kornecker-delta segítségével, $\sum_{i,j=1} \delta_{i,j} a_i (\underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{d}))_j$. Ezt követően kiírjuk az első keresztszorzatnak a j-edik komponensét, azaz $\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \delta_{i,j}\varepsilon_{j,k,l} a_i b_k (\underline{c} \times \underline{d})_l$. Ez követőe na maradék $(\underline{c} \times \underline{d})_l$ keresztszorzat l-edik komponensét is kiírjuk, ami utá na következő kapjuk:

$$\sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} \delta_{i,j}\varepsilon_{j,k,l}\varepsilon_{l,m,n} a_i b_k c_m d_n = \sum_{j,k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l}\varepsilon_{l,m,n} a_j b_k c_m d_n,$$

ahol csak egybeejtettük a Kornecker-deltának megfelelően az i és a j indexet, $i \to j$. ezt követően ismét alkalmazzu ka két Levi-Civita szimbólum szorzatára vonatkozó azonosságot, miután az első szimbólum indexeit ciklikusan permutáltuk, $\varepsilon_{j,k,l} \to \varepsilon_{l,j,k}$, ami alapján a következőt írhatjuk fel:

$$\sum_{j,k,m,n=1}^{3} (\delta_{j,m}\delta_{k,n} - \delta_{j,n}\delta_{k,m})\, a_j b_k c_m d_n,$$

egybeejtve a Kronecker-deltáknak megfelelő indexeket a következő kapjuk:

$$\sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k c_j d_k - \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k c_k d_j = \langle \underline{a}, \underline{c}\rangle \langle \underline{b}, \underline{d}\rangle - \langle \underline{a}, \underline{d}\rangle \langle \underline{b}, \underline{c}\rangle .$$

Két vektoriális szorzat vektoriális szorzatának kiszámítására:

$$((\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d})) :$$

Eleőször is általánosan az i-edik komponenst vizsgáljuk ismlt és kiírjuk a definíciót

$$((\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}))_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} (\underline{a} \times \underline{b})_j (\underline{c} \times \underline{d})_k ,$$

ezt követően a két keresztszorzatot írjuk ki egyesével, vagyis $(\underline{a} \times \underline{b})_j = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{j,l,m} a_l b_m$, illetve $(\underline{c} \times \underline{d})_k = \sum_{n,p=1}^{3} \varepsilon_{k,n,p} c_n d_p$, összerakva a két kifejezést a következőt kapjuk:

$$((\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}))_i = \sum_{j,k,l,m,n,p=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{j,l,m} \varepsilon_{k,n,p} a_l b_m c_n d_p.$$

Most alaklmazzuk az $\varepsilon_{j,k,i}\varepsilon_{j,l,m} = \delta_{k,l}\delta_{i,m} - \delta_{k,m}\delta_{i,l}$ összefüggést a $\varepsilon_{i,j,k}\varepsilon_{j,l,m} = \varepsilon_{j,k,i}\varepsilon_{j,l,m}$ tagra, ahol imsét végre hajtottunk egy ciklikus permutációt. Innen a következő kapjuk:

$$\sum_{k,l,m,n,p=1}^{3} (\delta_{k,l}\delta_{i,m} - \delta_{k,m}\delta_{i,l})\, \varepsilon_{k,n,p} a_l b_m c_n d_p = \sum_{k,n,p=1}^{3} \varepsilon_{k,n,p} (a_k b_i c_n d_p - a_i b_k c_n d_p)\,,$$

ahol csak összeejtettük az indexet a Kornecker-deltáknak megfelelően, vagyis az első két delta szerint $l \to k, m \to i$, illetve a második két delta szerint $m \to k, l \to i$. Most a $\sum_{n,p=1}^{3} \varepsilon_{k,n,p} c_n d_p$ definíció alapján $(\underline{c} \times \underline{d})_k$, ahonnan $\sum_{k,n,p=1}^{3} \varepsilon_{k,n,p}(a_k b_i d_n c_p - a_i b_k c_n d_p) = b_i \langle \underline{a}, \underline{c} \times \underline{d} \rangle - a_i \langle \underline{b}, \underline{c} \times \underline{d} \rangle$, vagyis általánosan:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = \underline{b} \langle \underline{a}, \underline{c} \times \underline{d} \rangle - \underline{a} \langle \underline{b}, \underline{c} \times \underline{d} \rangle$$

5. Analítikus geometria

5.1. Egyenes egyenlete:

Egy egyenes meghatározosához a háromdimenziós térben két megkötésre, két egyenletre van szükségünk, így korlátozódunk le 1 dimenzióra, ami nem más mint egy egyenes!
Egyenes egyenlete 2 pontja alapján: Legyen $A(x_1, y_1, z_1)$ és $B(x_2, y_2, z_2)$. Ekkor mivel az egyenes minden pontjának rajta kell lennie a két pontot összekötő egyenesen, egy tetszőleges pontot kifejezhetünk egy t paraméter segítségével ("milyen messze van A-tól és milyen közel B-hez"). Legyen $P = (x, y, z)$ az egyenes egy pontja, ekkor

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Innen kifejezve t-t mndegyi kegyenletből a következő adódik:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Figyelem ez összesen csak kettő egyenletet jelent, hiszen "csak két egyenlőség jelünk van", illetve bármelyik kettő kifejezés egyenlősége implikálja a harmadikat!

Egyenes egyenlete irányvektor és adott pont alapján: Legyen $P_0 = (x_0, y_0 z_0)$ az egyenes egy adott pontja és az egyenessel párhuzamos vektor, az egyenes *irányvektora* pedig $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Ekkor az egyenes egy tetszőleges pontjába, $P = (x, y, z)$, úgy juthatunk el, hogy adott t-szer hozzáadjuk P_0 pontba mutató helyvektorhoz, $\underline{r}_0$-hoz, az irányvektort

$$\underline{r}_P = (x, y, z) = \underline{r}_0 + t\,\underline{v},$$

amit komponensenként kiírva

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_x \\ y &= y_0 + tv_y \\ z &= z_0 + tv_z \ldots \\ &\rightarrow \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} \end{aligned}$$

ami láthatóan ugyanúgy a fenti két egyenletre vezet, ahol egszerűen $\underline{v} = \vec{AB}$, $v_i = (\underline{r}_B)_i - (\underline{r}_A)_i$!

Példák:

- Legyen az egyenes irányvektora $\underline{v} = (1, 1, 0)$, illetve egy pontja $P_0 = (1, 2, 1)$. Ekkor a definíció alapján a két egyenlet:

$$x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{0} (???)$$

Láthatóan butaság adódik a nullával való osztás miatt. Az ellentmondás oka, hogy először mindig az $x = x_0 + tv_x, \ldots$ egyneleteket kell felírni, amiből ekkor triviálisan adódik, hogy

$$\begin{aligned} x - 1 &= y - 2 \\ z &= 1, \end{aligned}$$

ahol az utóbbi azt jelenti, hogy $z = 1$ állandó, akár hol tartozkodunk az egyenesen, vagyis az egyenes az $x - y$ síkkal párhuzamosan fut a $z = 1$ magasságban!

- Legyen $A = (0, 1, -2)$, $B = (2, -1, 1)$. Most először adjunk meg egy irányvektort (mindig érdemes ezzel kezden, hogy lássuk, nem nulla-e egy komponense, mely esetben az előző eset szerint kell eljárni!), $\underline{v} = \vec{AB} = (2, -2, -1) \rightarrow$ alkalamzható a

$$\frac{x}{2} = \frac{1-y}{2} = -z - 2$$

kifejezés, ahol most az egyens ismert pontjának az A pontot kellett vennünk, a $\underline{v} \equiv \vec{AB}$ konstrukció miatt!

- Legyen $A = (-2, 3, 1)$, $B = (-1, 4, 2)$. Ekkor az irányvektorral kezdünk ismét (ha valamelyik komponense ennek nullának adódna, rögtön tudjuk, hogy a megfelelő koordinátra értéke rögzített lenne!), $\underline{v} = \vec{AB} = (1, 1, 1)$ Innen az egyenes egyenlete:

$$x + 2 = y - 3 = z - 1$$

- Legyen $A = (4, 0, -1)$, $B = (5, 0, 2)$, $C = (6, 0, -7)$. Egy egyenesre esnek-e? Ehhez elegendő megvizsgálnunk, hogy két tetszőleges kiválasztott pont páros által kapott egyens irányvektora párhuzamos-e $\Rightarrow \underline{v}_{AB} = \vec{AB} = (1, 0, 3)$, $\underline{v}_{AC} = (2, 0, -8)$, ami nyilván nem párhuzamos v_{AB}-vel. Vagyis a három pont nem esik egy egyenesre.

- Legyen $A = (1, -2, -1)$, $B = (3, -2, -1)$. Irányvektor: $\underline{v} = \vec{AB} = (2, 0, 0)$. Ekkor ismét felírva

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_x = 1 + 2t \\ y &= y_0 + tv_y = -2 \\ z &= z_0 + tv_z = -1, \end{aligned}$$

ami nem mást jelent, mint hogy az egyenes párhuzamos az x tengellyel és átmegy az $y = -2$ és $z = -1$ ponton!

5.2. Egyenes és pont távolsága:

Adott egy e egyenes, melynek ismerjük az őt jellemző egyenletet, vagyis egy pontját és az irányvektorát, ekkor meg tudjuk adni az egyenesnek két tetszőleges pontját is! Legyenek ezek ismét $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ és vegyünk egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontot, melynek az egyenestől vett távolságát keressük, vagyis a P pontot és az egyenest összekötő, az egyenesre merőleges szakasz hosszát. Ha vesszük a $\left|\vec{PA} \times \vec{AB}\right|$ keresztszorzat nagyságát, és leosztjuk a $\left|\vec{AB}\right|$ hosszal, $\frac{|\vec{PA} \times \vec{AB}|}{|\vec{AB}|} = \sin(\alpha) \left|\vec{PA}\right|$, ahol α a $\vec{PA}$ és az egyenes irányvektora által bezárt szög, így a fenti kifejezés éppen az egyenestől vett távolságot adja vissza, tehát:

$$d(P, e) = \frac{\left|\vec{PA} \times \vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|}.$$

Példák:

- Legyen $P = (-2, 3 - 7)$ és $e : \frac{x-1}{3} = 2 - y$, $z = 2$. először megadjuk a két pontot az egyenes egyenlete alapján: $A = (1, 2, 2)$, illetve az irányvektor, $\underline{v} = (3, -1, 0) \equiv \vec{AB}$ alapján a második pont $B = (4, 1, 2)$. Innen a szükséges vektor $\vec{PA} = (3, -1, 9)$, illetve $\vec{PA} \times \vec{AB} = (-5, -15, 0)$, ahonnan

$$\frac{\left|\vec{PA} \times \vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 5.$$

- Legyen $P = (-1, 2, 1)$, illetve e :

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 - t \\ z &= 3 + 3t \end{aligned}$$

  Ekkor az első pont mindig az egyenletek konstans tagjai, vagyis $A = (1, 2, 3)$ és $\vec{PA} = (2, 0, 2)$ illetve az irányvektor, $\underline{v} \equiv \vec{AB} = (2, -1, 3)$. Innen a keresztszorzat $\vec{PA} \times \vec{AB} = (2, -2, -2)$, ahonnan

$$\frac{\left|\vec{PA} \times \vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}.$$

- Legyen $P = (-2, 4, 1)$ és az egyenest most két pontjával paraméterezzük, $A = (-1, 4, 1)$ és $B = (0, 0, 0)$. Innen $\vec{PA} = (1, 0, 0)$ és $\underline{v} \equiv \vec{AB} = (1, -4, -1)$ illetve $\vec{PA} \times \vec{AB} = (0, 1, -4)$, innen a távolság

$$\frac{\left|\vec{PA} \times \vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18}}.$$

5.3. Egyenesek távolsága:

Legyen két egyenes adott irányvektorokkal, $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, illetve adott pontokkal $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Ekkor a két egyenes távolsága, most elvezetés nélkül (órán táblán rajzos illusztráció lesz/volt):

$$d(e_1, e_2) = \frac{\left|\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)\right|}{|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2|}$$

Példák:

- Legyen $e_1 : x + 4 = 8 - 2y = -z - 1$, illetve e_2:

$$\begin{aligned} x &= 4t - 5 \\ y &= -3t + 5 \\ z &= -5t + 5 \end{aligned}$$

  Ekkor a két irányvektor: e_1 esetében az x, y, z együtthatóinak reciproka, $\underline{v}_1 = (1, -1/2, -1)$, illetve a második esetben t együtthatói, $\underline{v}_2 = (4, -3, -5)$. Az egyenesen ismert pontok pedig e_2 esetében a konstans tagok $P_2 = (-5, 5, 5)$, míg e_1 esetében a konstans tagok leosztva a koordináták, x, y, z együtthatóival és szorozva mínusz eggyel, $P_1 = (-4, 4, -1)$, ahonnana két egyeneset összekötő vektor, $\vec{P_1P_2} = (-1, 1, 6)$. Most a vegyes szorzat értéke: $\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2) = 9/2$, illetve $|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2| = 3/2$, ahonnan a távolság:

$$d(e_1, e_2) = \frac{9/2}{3/2} = 3.$$

- Legyen $e_1 : \frac{2x-1}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{5z-6}{4}$, illetve e_2: $x = y = z$. Az irányvektorokat ismét leolvashatjuk a koordináták, x, y, z, együtthatóinak reciprokából, $\underline{v}_1 = (1, -3, 5/4)$, illetve $\underline{v}_2 = (1, 1, 1)$. Illetve a két egyenes ismert pontjai, $P_1 = (1/2, -3, 6/5)$, illetve $P_2 = (0, 0, 0)$, vagyis $\vec{P_1P_2} = (-1/2, 3, -6/5)$. A keresztszorzatja a két irányvektornak, $|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2| = |(-7/4, 1/4, 4)| = \sqrt{306}4$, Illetve a vegyes szorzat $\left|\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)\right| = \frac{257}{40}$. Innen a távolság:

$$d(e_1, e_2) = \frac{256/40}{\sqrt{306}/4} = \frac{256}{10\sqrt{306}}.$$

- Legyen $e_1 : \frac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1$, illetve e_2: $2 - x = y - 5 = z + 1$. Az irányvektorok ismét a koordináták együtthatóinak reciproka, x, y, z, $\underline{v}_1 = (5, -1, 1)$, illetve $\underline{v}_2 = (-1, 1, 1)$. A két ismert pont ismét a számlálóban lévő értékek mínusz egyszeresei, $P_1 = (1, 2, 1)$, $P_2 = (2, 5, -1)$, ahonnan a két pont között mutató vektor $\vec{P_1P_2} = (1, 3, -2)$. Innen a vektoriális szorzatok nagysága $|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2| = |(-2, -6, 4)| = 3\sqrt{6}$, illetve $\left|\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)\right| = 28$, vagyis a távolság:

$$d(e_1, e_2) = \frac{28}{3\sqrt{6}}$$

- Legyen $e_1 : x-1 = y+1 = z-2$, illetve e_2: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$. Látható rögtön, hogy a két egyenes ismert pontja egybeesik, hiszen $P_1 = P_2 = (1, -1, 2)$, vagyis a távolságban megjelenő vegyes szorzat azonosan nulla, hiszen egy null vektor van skalárszorozva két irányvektor keresztszorzatával$\Rightarrow$ $d(e_1, e_2) = 0$, ahogyan várjuk is két egymást metsző egyenestől!

5.4. Sík egyenlete:

A háromdimenziós térben, $\mathbb{R}^3$, egy síkot egy pontjával és a síkra merőleges *normálvektorral* jellemzünk. Legyenek ezek $A = (A_x, A_y, A_z)$ illetve $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z)$, ekkor arra vagyunk kiváncsiak, hogy a sík $P = (x, y, z)$ pontjai milyen összefüggést elégítenek ki. Érezhetően ezt egyetlen egyenlet fogja megadni, mivel gondolhatunk úgy is a síkra, mint ami egy *megkötés* által *eggyel* csökkenti az eredeti háromdimenziós tér dimenziószámát. (Ha két megkötés, két egyenlet adná meg a kérdéses $P = (x, y, z)$ pontokat, akkor egy egydimenziós egyenest kapnánk, lásd később). Mivel $\underline{n}$ merőleges a síkra, minden vektorra is az, ami benne va na síkban, vagyis $\vec{AP} = (x - A_x, y - A_y, z - A_z)$ vektor merőleges $\underline{n}$-re:

$$\underline{n} \cdot \vec{AP} = n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 0,$$

Ezt nevezzük a sík alapegyeneletének, ami szokás a $Ax + By + Cz + D = 0$ alakban is felírni, amit általános egyenletnek neveznek! Itt láthatóan $A \equiv n_x$,$B \equiv n_y$,$C \equiv n_z$, illetve $D \equiv \underline{n} \cdot \underline{r}_A$, ahol $\underline{r}_A$ az A pontba mutató helyvektor.

Példák:

- Adott $A = (-1, 2, 0)$ és a sík egy normálvektora (Figyelem: a normálvektor egy konstans szorzó erejéig egyértelmű csak!) $\underline{n} = (0, 3, 0)$.

Definíció alapján legyen $P = (x, y, z)$, és ekkor

$$\underline{n} \cdot \vec{AP} = n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 3(y - 2) = 0$$
$$\Rightarrow y = 2,$$

ahol az utolsó lépésben átírtuk a sík egyenletét az általános alakra, amiből látszik, hogy ez nem más mint az $y = 2$ értéknél lévő $x - z$ síkkal párhuzamos sík!

- Adott $A = (3, 2, -2)$ és a sík egy normálvektora $\underline{n} = (2, 0, 3)$:
  Ismét az alapegyenlet:

$$\underline{n} \cdot \vec{AP} = n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 2(x - 3) + 3(z + 2) = 0$$
$$\Rightarrow 2x + 3z = 0 \rightarrow z = -\frac{2}{3}x$$

  Az általáos alak ismét többetmondó magának a síknak az elhelyezkedéséről: az $x - z$ síkban megadott $z = -\frac{2}{3}x$ egyenest tartalmazó y irányban végtelen síkról van szó!

- Most a sík három pontjának ismeretében határozzuk meg a sík pontjaira vonatkozó egyenletet! Ezt csinálhatjuk direktben, vagyis megoldjuk az általános egyenletet a 3 pont koordinátáinak ismeretében A, B, C, D-re. Ehelyett sokkal kéynelmesebb megkonstruálni a három pontból a sík két vektorát, abból a sík egy normálvektorát, majd véve egy tetszőleges pontot a három közül alkalmazni az alapegyenletre vonatkozó egyszerű összefüggést!
  Legyen $A = (1, 5, 1)$,$B = (2, -1, 1)$,$C = (4, 3, 1)$ és vegyük az $\vec{AB} = (1, -6, 0)$ és $\vec{AC} = (3, -2, 0)$ A és B, illetve A és C pontokat összekötő vektorok vektoriális szorzatát, ami a keresztszorzat definíciója alapján merőleges a síkra:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 0, 16) \equiv \underline{n}$$

  Innen már egyszerű dolgunk van, hiszen vegyük az A pontot, mint a sík egy pontját felhasználandó az alapegyenlet megadásához és ismét egy általános $P = (x, y, z)$ pontját a síknak:

$$\underline{n} \cdot \vec{AP} = n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 16(z - 1) = 0$$
$$\Rightarrow z = 1,$$

  vagyis sík nem más mint az $x - y$ sík a $z = 1$ pontban!

- Legyen $A = (2, 0, 0)$,$B = (-1, 0, 0)$,$C = (0, 2, -1)$. Innen a sík egyenletéhez először ismét kiszámítjuk az $\vec{AB} = (-3, 0, 0)$, illetve az $\vec{AC} =$

$(-2, 2, -1)$ vektorok keresztszorzatát, $\underline{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (0, -3, -6)$, ahonnan az alapegyenlet most is az A pont segítségével felírva:

$$-3(y-0) - 6(z-0) = 0 \to z = -\frac{y}{2}$$

Vagyis a sík a második, általános egyenlet alapján nem más mint a $z = -\frac{y}{2}$ egyenest követő sík az x irányban! Úgy is tekinthetünk rá, mint tetszőleges x esetén azon pontok, amik rajta vannak ezen az egyenesen.

5.5. Pont és sík távolsága:

Ismert az S sík és egy $\underline{n}$ normálvektora és egy $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, melynek a síktól vett távolságára vagyunk kiváncsiak, vagyis a pontot és a síkot összekötő, a síkra merőleges szakasz hosszára. Ehhez vegyünk egy tetszőleges pontot a síkban $P = (x, y, z)$ és kössük össze P_0-al, $\vec{PP_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$. Ekkor a sík és $\vec{PP_0}$ által bezárt szög szinusza éppen $\vec{PP_0}$ és $\underline{n}$ átlal bezárt koszinuszával egyenlő, amit viszont ki tudunk fejezni:

$$\cos\Big(\varphi\Big(\underline{n}, \vec{PP_0}\Big)\Big) = \frac{\underline{n} \cdot \vec{PP_0}}{|\underline{n}|\Big|\vec{PP_0}\Big|} \equiv \sin\Big(\varphi\Big(\vec{PP_0}, S\Big)\Big)$$

Innen a síktól vett távolság nem más mint

$$d(P_0, S) = \sin\Big(\varphi\Big(\vec{PP_0}, S\Big)\Big)\Big|\vec{PP_0}\Big| = \frac{\underline{n} \cdot \vec{PP_0}}{|\underline{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}},$$

Ahol A, B, C, D az általános egyenlet együtthatói!

Példák:

- Legyen az S sík egyenlete $2x - 4y + 2z = 1$ és a pont, aminek a távolságát keressük ettől az egyenestől $P_0 = (-1, 2, 1)$. A tanult összefüggés alapján:

$$d(P_0, S) = \frac{|2(-1) - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{24}}.$$

- Legyen az S sík egyenlete $S : -x + 8y + 10z = 0$ és keressük a $P_0 = (1, 1, 1)$ pont távolságát ettől az egyenestől. Ismét alkalmazva az összefüggést:

$$d(P_0, S) = \frac{|-1 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 10^2}} = \frac{17}{\sqrt{165}}$$

- Legyen $P_0 = (1, 1, 5)$,illetve a sík egyenlete $S: 2x + 3y - z = 0$, ekkor látahtóan P_0 pontjai kielégítik a sík egyenletét, P_0 rajta van a síkon, vagyis a számláló a $d(P_0, S)$ kifejezésében azonosan nulla, ahogyan vártuk!

- Legyen $P_0 = (1, 2, 3)$, illetve az S sík egyenlete $z = 2$. Ekkor az általános egyenlet együtthatói $C = 1$,$D = -2$, vagyis $d(P_0, S) = 1$, ahogyan vártuk, hiszen a sík az $x - y$-al párhuzamosan $z = 2$-ben helyzkedik el, így minden $z = 3$-al jellemzett pont $d = 1$ távolságra lesz tőle!

Ha sík és egyenes távolságát akarnánk megkeresni, akkor azt visszavezethetjük a sík és pont távolságára. Ugyanis az egyenes vagy metszi a síkot és ezáltal távolságuk $d(S, e) = 0$ vagy az egyenes normálvektora párhuzamos a sík normálvektorával. Utóbbi esetben az egyenes minden pontja azonos távolságra van a síktól, így akár csak egyet ismerve közülük vehetjük azon pont és sík távolságát.

5.6. Összegzés

Egyenes egyenlete: Ha p_0 egy ismert pont az egyenesen, $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{v}$ az egyenes irányvektora, akkor az egyenes egyenlete felírható mint:

$$\underline{r}_{p_0}(\alpha) = \underline{p}_0 + \alpha \cdot \underline{v} \tag{5.1}$$

felbontva komponenseire:

$$\begin{aligned} r_x(\alpha) &= \left(\underline{p_0}\right)_x + \alpha v_x \\ r_y(\alpha) &= \left(\underline{p_0}\right)_y + \alpha v_y \\ r_z(\alpha) &= \left(\underline{p_0}\right)_z + \alpha v_z \end{aligned}$$

ebből kifejezve az α paramétert:

$$\frac{x - (\underline{p}_0)_x}{v_x} = \frac{y - (\underline{p}_0)_y}{v_y} = \frac{z - (\underline{p}_0)_z}{v_z} \tag{5.2}$$

Egyenes és pont távolsága: $P = (p_x, p_y, p_z)$ egy pont, e pedig egy egyenes P_1 és P_2 ismert ponttal és $\underline{v}$ irányvektorral, ekkor a pont és egyenes távolsága:

$$d(P, e) = \frac{|\vec{PP_e} \times \vec{P_1P_2}|}{|\vec{P_1P_2}|} \tag{5.3}$$

Egyenesek távolsága: e_1 egyenes v_1 irányvektorral és P_1 ismert ponttal, illetve e_2 egyenes v_2 irányvektorral és P_2 ismert ponttal:

$$d(e_1, e_2) = \frac{|\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v_1} \times \underline{v_2})|}{|\underline{v_1} \times \underline{v_2}|} = \frac{|\vec{P_1P_2} \cdot \underline{n}|}{|\underline{n}|} \tag{5.4}$$

Sík egyenlete: 3 pontja vagy 1 pontja és normálvektora határozza meg. S sík $\underline{n}$ normálvektorral és ismert $P = (p_1, p_2, p_3)$ ponttal és egy tetszőleges $Q = (x, y, z)$ ponttal:

$$\underline{n} \cdot (\vec{PQ}) = 0 = n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) \tag{5.5}$$

kifejtve a szorzatokat, megkapjuk az általános egyenletet:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{5.6}$$

Sík és pont távolsága: Ismert S sík $\underline{n}$ normálvektora és egy P pontja, ekkor keressük a P_0 pont távolságát a síktól:

$$d(P, S) = \frac{\underline{n} \cdot (\vec{PP_0})}{|\underline{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \tag{5.7}$$

6. Lineáris leképezések

6.1. Definition (Lineáris leképezés)**.** *Az* $\underline{\underline{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *transzformáció lineáris, ha* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ *esetén* $\underline{\underline{A}}\,(\alpha\, \underline{a} + \beta\, \underline{b}) = \alpha\, \underline{\underline{A}}\, \underline{a} + \beta\, \underline{\underline{A}}\, \underline{b}$

Adott $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ vektort, adott lináris leképezés egy $\underline{r}' \in \mathbb{R}^3$ vektorba képzi le. A lineáris leképezés mátrixát $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jelölve, az $\underline{r}'$ vektor

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{r} = \underline{r}' \tag{6.1}$$

Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ lineáris leképezés mátrixának meghatározásához meg kell vizsgálnunk, hogyan hat egy adott vektor esetén annak bázisára. Példaként a kanonikus bázist tekintve, a bázisvektorok transzformációját a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}\, \underline{i} &= a_{11}\, \underline{i} + a_{21}\, \underline{j} + a_{31}\, \underline{k}, \\ \underline{\underline{A}}\, \underline{j} &= a_{12}\, \underline{i} + a_{22}\, \underline{j} + a_{32}\, \underline{k}, \\ \underline{\underline{A}}\, \underline{k} &= a_{13}\, \underline{i} + a_{23}\, \underline{j} + a_{33}\, \underline{k}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

ahol $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{3} = \underline{\underline{A}}$.

Remark. $\mathbb{R}^2$ esetén, adott lineáris leképezés mátrixa 2×2-es mátrixot jelent, így 9 meghatározandó elem helyett, csupán 4 elemet kell meghatározni.

Ezek alapján egy lineáris leképezés mátrixának hatása egy vektorra ($\underline{r} \in \mathbb{R}^3$) a következőképpen fejezhető ki: legyen $\underline{r} = (x, y, z) \equiv x\, \underline{i} + y\, \underline{j} + z\, \underline{k}$, ekkor felhasználva a bázisvektorokkal felírt definíciót

$$\begin{aligned} \left(\underline{\underline{A}}\, \underline{r}\right)_i &= \left(x\, \underline{\underline{A}}\, \underline{i} + y\, \underline{\underline{A}}\, \underline{j} + z\, \underline{\underline{A}}\, \underline{k}\right)_i \\ &= (a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)\, \underline{i} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)\, \underline{j} + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)\, \underline{k} \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\, r_j \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.1. Example (Mátrix és vektor szorzata)**.**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{r} = (1, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}\, \underline{r} &= (1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 0\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 2 - 1\cdot 1, 1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1) \\ &= (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

Vetítések, tükrözések vagy forgatások esetén érdemes felbontani a transzformálandó vektort a vetítésvektorra merőleges és párhuzamos komponensére (csakúgy mint a forgatások esetén a forgatás tengelyre merőleges- és párhuzamos komponensekre),

$$\underline{r} = \underline{r}_{\perp} + \underline{r}_{\parallel}. \tag{6.4}$$

A felbontás során találhatunk olyan komponenst amely a transzformáció során nem változik meg. Ennek kihasználása megkönnyítheti a számaításainkat.

A következőkben $\underline{v}, \underline{r} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\underline{r} = (x, y, z)$. $\underline{r}$ vektor $\underline{v}$-re való vetítése során először határozzuk meg előbbi vektor $\underline{v}$-n felmért hosszát, mint

$$\| \underline{r}_{\parallel} \| = \frac{\underline{v}\,\underline{r}}{\| \underline{v} \|}. \tag{6.5}$$

A vetíteni kívánt vektor iránya párhuzamos a vektorra amire vetítjük azt, így

$$\frac{\underline{r}'}{\| \underline{r}' \|} = \hat{\underline{r}}' \parallel \hat{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{\| \underline{v} \|}. \tag{6.6}$$

Ismerve a vetített vektor hosszát és irányát, azt felírhatjuk

$$\underline{r}' = \frac{\underline{v}\,\underline{r}}{\| \underline{v} \|} \frac{\underline{v}}{\| \underline{v} \|} = \frac{(\underline{v}\,\underline{r})\,\underline{v}}{\| \underline{v} \|^2} = \underline{r}_{\parallel} \tag{6.7}$$

alakban. Ugyanakkor kihasználhatjuk a fent megjelenő skaláris szorzat azonosságát, miszerint

$$(\underline{a}\,\underline{b})\,\underline{c} = (\mathbf{c} \circ \mathbf{a})\,\underline{b}. \tag{6.8}$$

Ezen azonosság segítségével pedig a vetíteni kívánt vektor kiemelhető a (6.7). képletből.

6.1. Exercise (Vetítés vektorra)**.** Legyen $\underline{v} = (1, -1, 2)$ és adjuk meg az erre a vektorra való vetítés lineáris leképezésének mátrixát. A fentiek alapján határozzuk meg a tetszőleges $\underline{r}$ merőleges vetületét és szorozzuk meg a $\underline{v}$-irányába mutató egységvektorral.

$$\begin{aligned} &\|v\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \|v\|^2 = 6 \\ &\underline{v}\,\underline{r} = x - y + 2z \end{aligned}$$

$$\underline{r}' = \frac{1}{6}\,(x - y + 2z,\ -x + y - 2z,\ 2x - 2y + 4z) \tag{6.9}$$

Vegyük most az általános lineáris leképezés mátrix és tetszőleges vektor közötti (6.1). összefüggést és hasonlítsuk össze az általunk kapott vektorral.

A mátrix együtthatói $\underline{r}'$-ra kapott összefüggésből leolvashatóak az általános mátrix-vektor szorzat ismeretében:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

6.2. Exercise (Vetítés síkra)**.** Legyen adott az S sík egy normálvektora $\underline{n} = (2, 1, -1)$, $|\,\underline{n}|^2 = 6$, ekkor a normálvektorra merőleges vetületét kell meghatároznunk a tér egy adott $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorának. Ekkor bontsuk fel $\underline{r}$-t az $\underline{n}$-re merőleges és az arra párhuzamos komponens összegeként:

$$\underline{r} = \underline{r}_{\parallel} + \underline{r}_{\perp}, \tag{6.11}$$

ahol $\underline{r}_{\parallel} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{\|\,\underline{n}\|^2}\,\underline{n}$ egyszerűen az előző példában kiszámított párhuzamos vetület, ekkor egyszerűen a merőleges vetület, vagyis az $\underline{r}$ vektor S síkban tartozkodó része:

$$\begin{aligned} \underline{r}_{\perp} &= \underline{r} - \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{\|\,\underline{n}\|^2}\,\underline{n} \\ &= (x, y, z) - \frac{2x + y - z}{6}(2, 1, -1) \\ &= \frac{1}{6}(2x - 2y + 2z, -2x + 5y + z, 2x + y + 5z)\,, \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ahonnan a mátrix már könnyen leolvasható:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

6.3. Exercise (Vektorra merőleges komponens meghatározása)**.** Legyen most $\underline{v} = (-1, -1, 1)$. Itt ugyanaz a feladatunk, mint ahogy a síkra való vetítésnél az $\underline{n}$ normálvektor esetében eljártunk, vagyis vegyük a tetszőleges $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ vektor $\underline{v}$-ra merőleges és azzal párhuzamos vetület szerinti felbontását:

$$\underline{r} = \underline{r}_{\parallel} + \underline{r}_{\perp}, \tag{6.14}$$

ahol ismét az első feladat alapján, $\underline{r}_{\parallel} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\,\underline{v} = \frac{-x-y+z}{3}(-1, -1, 1)$, vagyis a merőleges komponens $\underline{r}_{\perp} = \underline{r} - \underline{r}_{\parallel} = (x, y, z) - \frac{-x-y+z}{3}(-1, -1, 1) = \frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y - z, x + y + 2z)$, ahonnan a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

6.4. Exercise (Forgatás 2 dimenzióban)**.** Adott φ szöggel való forgatás 2 dimenzióban. Vegyük $\underline{i}$ és $\underline{j}$ bázisvektorokat, ekkor egy tetszőleges vektor forgatása egyenértékű a bázisvektorok forgatásával. Ezek transzformáltja pedig

$$\underline{i}' = \cos(\varphi)\ \underline{i} + \sin(\varphi)\ \underline{j} \tag{6.16}$$

$$\underline{j}' = -\sin(\varphi)\ \underline{i} + \cos(\varphi)\ \underline{j} \tag{6.17}$$

alakban írható fel. Ezen egyenletekből pedig leolvashatjuk a lineáris transzformáció mátrixát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Remark. Most számítsuk ki az inverzét a φ szögű forgatás mátrixának. 2×2-es mátrixok esetén az általános

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

mátrixnak az inverze a következő képpen adható meg:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Innen a forgatás mátrix inverze egyszerűen

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix}, \tag{6.20}$$

vagyis ahogy vártuk, a φ szöggel való forgatás mátrixának inverze nem más mint a $-\varphi$-vel való forgatás mátrixa.

6.5. Exercise (Tükrözés síkra)**.** Hasonlóan járhatunk el, mint amikor a síkra vett vetületet néztük. Felbontjuk a tér egy adott $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát az S sík $\underline{n}$ normálvektorával párhuzamos, illetve arra merőleges komponensére, $\underline{r} = \underline{r}_{||} + \underline{r}_{\perp}$, ahol a fentiek alapján, $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\underline{n}|^2}\,\underline{n}$. Ekkor a síkra való tükrözés nem változtatja meg a síkkal párhuzamos (a normálvektorra merőleges komponenst), viszont $\underline{r}_{||} \to -\underline{r}_{||}$ módon változtatja meg a normálvektorral párhuzamos (síkra merőleges) komponenst, vagyis összességében:

$$\underline{r}' = \underline{r}_{\perp} - \underline{r}_{||} \equiv \underline{r} - 2\,\underline{r}_{||} = \underline{r} - 2\frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\underline{n}|^2}\,\underline{n} \tag{6.21}$$

Legyen most $\underline{n} = (1, 0, 1)$, ekkor $\underline{r}_{||} = \frac{x+z}{2}(1, 0, 1)$, vagyis a tükörkép vektor

$$\underline{r}' = (x, y, z) - (x + z)(1, 0, 1) = (-z, y, -x)\,, \tag{6.22}$$

ahonnan a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

6.6. Exercise (Tükrözés vektorra)**.** Ekkor ismét a tér egy tetszőleges $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát felbontjuk az adott $\underline{v}$-vel párhuzamos és az arra merőleges komponense szerint, $\underline{r} = \underline{r}_\perp + \underline{r}_{||}$, ahol ismét a fentiek alapján $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\,\underline{v}$. Ekkor, mivel most magára a vektorra és nem a vektorra merőleges síkra tükrözünk, a vektorral párhuzamos komponens fog változatlan maradni, és a merőleges komponensnek kell vennünk a mínusz egyszeresét, $\underline{r}_\perp \to -\underline{r}_\perp$, vagyis a transzformáció összességében:

$$\underline{r}' = \underline{r}_{||} - \underline{r}_\perp = 2\,\underline{r}_{||} - \underline{r} = 2\frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\,\underline{v} - \underline{r}. \tag{6.24}$$

Most legyen $\underline{v} \equiv (1, 0, 0)$, ekkor $\underline{r}_{||} = (x, 0, 0)$, vagyis a transzformált vektor, $\underline{r}' \equiv (x, -y, -z)$, ahonnan pedig a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

6.7. Exercise (Forgatás 3 dimenzióban, tetszőleges vektor körül)**.** Ehhez először bontsuk fel a tér egy tetszőleges $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát a forgatási vektorra párhuzamos, $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{n}\cdot\underline{r}}{|\underline{n}|^2}\,\underline{n}$, illetve az arra merőleges, $\underline{r}_\perp = \underline{r} - \underline{r}_{||}$ komponensre és vegyük észre, hogy ekkor a párhuzamos komponens változatlan marad! (megjegyzés: utólagosan kicsit megváltoztattam a jelölést ahhoz képest amit órán használtam) Ami a merőleges komponenst illeti, azt egy olyan koordinátarendszerben kell φ szöggel elforgatnunk, amiben az egyik bázisvektor ($\underline{r}_i$) egyszerűen $\underline{r}_\perp$ feleltethető meg (ahol lenomrálhatjuk a nagyságát 1-re, hiszen $|\underline{i}| = 1$, ám ekkor a bázis forgatása után ismernünk kell $\underline{r}_\perp$ vektor nagyságát, ami most nem célravezető), illetve a másik bázisvektornak ($\underline{j}$) pedig a $\underline{r}_j \equiv \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} \times \underline{r}_\perp$ vektorral azonosíthatjuk. (jelen esetben itt a bázis nagysága azonos a tetszőleges vektor ($\underline{r}$) merőleges komponensével ($\underline{r}_\perp$). Ekkor a φ szögű forgatás egyszerűen:

$$\underline{r}'_\perp = \cos(\varphi)\,\underline{r}_i + \sin(\varphi)\,\underline{r}_j \tag{6.26}$$

Mivel a párhumos komponens változatlan marad, a forgatott vektor:

$$\underline{r}' = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\underline{n}|^2}\,\underline{n} + \cos(\varphi)\,\underline{r}_i + \sin(\varphi)\,\underline{r}_j \tag{6.27}$$

Ahol az első tag a párhuzamos komponenst a második kettő pedig a merőleges komponenes φ-vel forgatott esete látható.

Legyen $\underline{n} = (1, 0, 1)$ és $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
A szükséges mennyiségek:

$$\underline{r}_\perp = \underline{r} - \frac{\underline{n}\cdot\underline{r}}{|\underline{n}|^2}\,\underline{n} = (x, y, z) - \frac{1}{2}(x + z, 0, x + z) = \frac{1}{2}(x - z, 2y, z - x)\,,$$

$$\frac{\underline{n}}{|n|} \times \underline{r}_\perp = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y, x - z, y)$$

Innen a transzformált vektor:

$$
\begin{aligned}
\underline{r}' &= \frac{1}{2}(x+z, 0, x+z) \\
&+ \cos(\pi/4)\frac{1}{2}(x-z, 2y, z-x) \\
&+ \sin(\pi/4)\frac{1}{\sqrt{2}}(-y, x-z, y) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(\sqrt{2}+1\right)x - \sqrt{2}y + \left(\sqrt{2}-1\right)z \\ 2y + \sqrt{2}(z-x) \\ \left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{2}y + \left(\sqrt{2}+1\right)z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ahonnan pedig a transzformáció mátrixa:

$$
\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}. \tag{6.28}
$$

7. Mátrix determináns számítás

7.1. Definition (Mag). *Az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix/lineáris leképezés,* $\underline{\underline{A}} \in Lin(\mathbb{V}, \mathbb{U})$, $\underline{\underline{A}} : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ *magja azon vektorok, melyeket a mátrix a null vektorba viszi:*

$$\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} = \left\{ \underline{v} \in \mathbb{V},\ \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{0} \in \mathbb{U} \right\} \tag{7.1}$$

7.2. Definition (Képtér). *Az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix/lineáris leképezés képtere azon vektorok halmaza, amelyeket a* $\mathbb{V}$ *vektoraiból kapunk, ha hattatjuk rájuk a mátrixot/lineáris leképezést:*

$$\operatorname{Im} \underline{\underline{A}} = \left\{ \underline{\underline{A}}\,\underline{v},\ \underline{v} \in \mathbb{V} \right\} \tag{7.2}$$

7.1. Theorem (Dimenziótétel). $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$ *esetén* $\dim\mathbb{V} = \dim\mathrm{Ker}\,\underline{\underline{A}} + \dim\mathrm{Im}\,\underline{\underline{A}}$.

7.1. Example (Dimenziótétel példa). Legyen $\underline{\underline{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$-ból az x, y síkra való vetítés, azaz

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor a mag, a z irányba mutató vektorok halmaza, hiszen látható, hogy a csak z komponenssel rendelkező vektorok x, y síkra vetítése során a null vektort adják vissza. Más szavakkal, ha $\underline{v} = (0, 0, z)$, akkor $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = (1 \cdot 0, 1 \cdot 0, 0 \cdot z) \equiv (0, 0, 0)$, vagyis a mag $\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$.
A képtér a leírásból is láthatóan minden az x, y síkban lévő vektor, vagyis $\mathbb{R}^2$, hiszen egy tetszőleges vektort véve, $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, azaz $\operatorname{Im} \underline{\underline{A}} = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}^2$.

7.3. Definition (Permutációk). $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *halmaz permutációja, ha* σ *bijektív leképezés.*

7.2. Example (Permutáció 1.példa). $\sigma\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 1, 4\}$, vagyis $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 4$.

7.3. Example (Permutáció 2.példa). $\sigma\{1, 2, 3\} = \sigma\{3, 1, 2\}$, vagyis $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$, ami éppen egy ciklikus permutációja az $\{1, 2, 3\}$-nak!

7.4. Definition (Inverziók). *Ha* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*-ra teljesül, hogy* $i < j$ *és* $\sigma(j) < \sigma(i)$*, akkor a két elem inverzióban áll egymással, ekkor* $I(\sigma)$ *az inverziók száma.*

Permutáció paritása: $(-1)^{I(\sigma)}$, vagyis $+1$, amikor az eredeti sorrend páros sok pár cserével kapható vissza, ezeket nevezzük *páros permutációknak* és -1, ha páratlan sokkal, ezeket pedig *páratlan permutációknak* nevezzük! Három dimenzióban ez éppen megegyezett a ciklikus és a nem ciklikus permutációkkal.

7.4. Example (Inverziók száma 1.példa).

$\sigma\{1,2,3,4\} = \{2,3,1,4\}$. Ekkor megcserélve a 3-ast és 1-est, illetve ezt követően a 2-est és az 1-est visszakapjuk az eredeti halmazt, vagyis páros sok cserére volt szükségünk, azaz $I(\sigma) = 2$, illetve a paritás $(-1)^{I(\sigma)} \equiv +1$.

7.5. Example (Inverziók száma 2.példa). $\sigma\{1,2,3,4,5\} = \{5,1,2,4,3\}$: Először érdemes a végén lévő 3-ast és 4-est megcserélnünk annak érdekében, hogy leszámítva az első 5-öst az elemek egymáshoz vizonyított sorrendje stimmeljen, ekkor az így kapott $\{5,1,2,3,4\}$-ből visszakaphatjuk az eredeti halmazt, ha az 5-öst rendre felcseréljük az 1-essel, a 2-essel, a 3-assal és a 4-essel, ami így összesen 5 párcserét jelent, vagyis $I(\sigma) = 5$, illetve a paritás $(-1)^{I(\sigma)} \equiv -1$.

7.6. Example (Inverziók száma 3.példa).

σ, illetve az inverze σ^{-1}-nek azonos az inverziószámuk és így azonos paritásúak, hiszen ugyanannyi párcsere szükséges a visszarendezéshez, mint az eredeti permutációhoz,

$$\sigma^{-1}\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

7.5. Definition (Determináns). *Az $\underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R})$, vagyis valós értékű $n \times n$-es mátrixok esetén*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

a mátrix determinánsa a következőképpen írható fel:

$$\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)} \tag{7.4}$$

Vagyis összegzünk az $\{1, 2, \ldots, n\}$ minden permutációjára és az adott permutáció alapján választjuk ki az adott sorokból az elemeket. Az így kapott szorzatot az adott permutáció pariásával súlyozzuk.

2x2-es mátrixok esetén két lehetséges permutációnk van, a $\sigma_1\{1,2\} = \{1,2\}$, az identitás, nulla párcserével és így $(-1)^{I(\sigma_1)} \equiv +1$ paritással, illetve az egyetlen nem triviális permutáció, $\sigma_2\{1,2\} = \{2,1\}$, ahol egyetlen párcserét végeztünk el, vagyis a paritás $(-1)^{I(\sigma_2)} \equiv -1$.

Alkalamzva a definíciót:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= (-1)^{I(\sigma_1)} a_{1\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} + (-1)^{I(\sigma_2)} a_{1\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

ami épp a korábbiakban bevezetett definícióval egyező eredményt adja vissza!

Mátrix determináns néhány tulajdonsága:

- Mátrix transzponáltjának determinánsa a mátrix determinánsával megegyezik: $\left[\underline{\underline{A}}^T\right]_{i,j} = \left[\underline{\underline{A}}\right]_{j,i}$,

$$\det\left(\underline{\underline{A}}^T\right) = \det\left(\underline{\underline{A}}\right). \tag{7.5}$$

- Ha egy mátrix két sora, vagy oszlopa azonos, akkor a determináns nulla, $a_{i,k} = a_{i,j}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq j$ vagy $a_{k,i} = a_{j,i}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq j \to \det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 0$.
- Oszlopok avagy sorok cseréje megváltoztatja a determináns előjelét!
- Ha egy sor vagy oszlop csupa nulla, akkor a determináns zérus, $a_{i,k} = 0$ vagy $a_{k,i} = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots \to \det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 0$.
- Egy sor vagy oszlop λ-szorosát vesszük a mátrix determinánsa is λ-szorosára nő.
- Sorok és oszlopok egymás között lineár kombinálhatóak, anélkül, hogy változna a determináns. Vagyis bármelyik sor tetszőleges számszorosát hozzáadhatjuk egy másik sorhoz és a determináns nem fog megváltozni.
- Alsó/Felső háromszög mátrixok determinánsa a diagonális elemek szorzata.

7.1. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

Mivel ez egy felsőháromszög mátrix a determinánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$.

7.2. Exercise. Felhasználva azt a szabályt, hogy ha egy mátrix sorában vagy oszlopában minden elem zérus, akkor a determináns értéke is azonosan nulla, érdemes speciális egyszerű esetekben megpróbálni egyes sorokat/oszlopokat kinullázni egy másik sor vagy oszlop hozzáadásával:
Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Látható, hogy ha levonjuk az első sort a másodikból, illetve hozzáadjuk a harmadik sort a másodikhoz, akkor éppen kinulláztuk annak minden elemét, vagyis ez a determináns zérus, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) \equiv 0$!

7.3. Exercise. Felhasználva, a háromszög mátrixoknál tanult tulajdonságokat, illetve azt a az azonosságot, hogy bármely két sor/oszlop cseréje nyomán a determináns előjelet vált, tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Látható, hogy ha megcseréljük először a második és a hamradik sort $2 \leftrightarrow 3$, majd a harmadikat és a negyediket $3 \leftrightarrow 4$, akkor éppen következő felső háromszög mátrixra jutunk:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

aminek a determinánsa egyszerűen az átlós elemek szorzata, vagyis $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Itt két cserét végeztünk el, ami így egy $(-1)^2 = 1$-es szorzót jelentett.

7.4. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

Adjuk hozzá a 4. sor -$\frac{1}{2}$-szeresét a 2. sorhoz, ezzel kinulláztuk a 2. sor utolsó elemét:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 7/2 & 4 & 3/2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Így a harmadik sorral kinullázhatjuk a 2. sor 3. elemét és az 1. sor 3. elemét, ahonnan

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 5/2 & 0 & 0 \\ 23/4 & 13/4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Most kinullázhatjuk a 2. sor $-10/13$-szorosával az 1. sor 2. elemét:

$$\begin{bmatrix} -152/52 & 0 & 0 & 0 \\ 23/4 & 13/4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

Aminek a determinánsa csak a főátlóban lévő elemek szorzata, vagyis $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = -152/52 \cdot 13/4 \cdot (-2) \cdot 2 = 38$.

7.5. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

Látható, hogy az első oszlop 2., 3. és 4. sora rögtön kinullázható, ha levonjuk belőlük az első sor elemeit, ekkor a következő mátrix adódik:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Most vonjuk ki a második sor 2-eresét a 3.-ból, illetve a 3-orosát a 4. sorból, amiből

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez már egy felső háromszög mátrix, amin rögtön látszik, hogy a determinánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

7.6. Exercise. Számítsuk a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Hozzuk felső hárosmzög alakra, ehhez először ismét az 1. oszlop 2., 3. és 4. sorának elemeit nullázzuk ki az 1. sor segítségével, vagyis vonjuk ki a megfelelő sorokból az első sor 2, 3 és 4-szeresét, ahonnan

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{bmatrix}$$

Most vonjuk ki a 2. sor 2, illetve 7 -szeresét a 3., illetve a 4. sorból, ekkor a következő mátrix adódik:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{bmatrix}$$

Ezt követően adjuk hozzá a 3. sort a 4.-hez, ahonnan már egy felső háromszög mátrix adódik

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

aminek a deteriminánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, $\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160$.

Kifejtési tétel: Előjeles aldetermináns: $A_{i,j}$ úgy kapható meg, hogy kivesszük az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i-ik sorát és j-edik oszlopát és vesszük az így létrejövő $\underline{\underline{\tilde{A}}}_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, $n-1 \times n-1$-es mátrix determinánsát$\times(-1)^{i+j}$. Ekkor a mátrix detrminánsa előáll a következő módon, ha egy tetszőleges $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$-adik *oszlop szerint fejtjük ki*

$$\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k} \tag{7.15}$$

Illetve az $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sor szerinti kifejtés segítségével:

$$\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k} \tag{7.16}$$

7.7. Exercise. A kifejtési tétellel egyszerűen visszakapható a 2×2-es mátrixok determinánsának képlete egy tetszőleges

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

.

Triviálisan az (i, j)-ik aldetermináns egyszerűen az az egy elem, amit nem zártunk ki$\times(-1)^{i+j}$. Vagyis $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$, most fejtsük ki az első sor zerint vagyis

$$\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a \cdot d + b \cdot (-c) \equiv ad - bc$$

7.8. Exercise. Mutassuk meg a kifejtési tétel segítségével, hogy a 3×3-as mátrixok determinánsának "varázs képlete" visszakapható a kifejtési tétel és a 2×2 mátrixok determinánsának ismeretében, legyen a mátrix átlalánosan:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Fejtsük ki most az első sor szerint ismét, ekkor a három megfelelő aldetermináns:

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} = ei - fh, \; A_{12} = -\det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} = fg - di, \; A_{13} = \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} = dh - eg.$$

Ekkor a 3×3-as determináns a kifejtsi szabály alapján:

$$\begin{aligned}\det\left(\underline{\underline{A}}\right) &= aA_{11} + bA_{12} + cA_{13} \\ &= a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg) \\ &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.\end{aligned}$$

7.9. Exercise. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

Fejtsük ki az első sor alapján, ugye ekkor csak azt az aldeterminánst kell tekintenünk, amikor az 1. sort és a 2. oszlopot vesszük ki, ekkor a fentmaradó aldeterminány:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+2} \det\left(\underline{\underline{\tilde{A}}}_{12}\right), \tag{7.18}$$

ahol

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.19}$$

aminek a determinánsa a 3×3-as esetben tanultak alapján egyszerűen $\det\left(\underline{\underline{\tilde{A}}}_{12}\right) = 30$, ahonnan összességében az eredeti mátrix determinánsa $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = -\det\left(\underline{\underline{\tilde{A}}}_{12}\right) = -30$.

7.10. Exercise. Számítsuk ki a kifejtési tétel segítségével a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy ha a harmadik sor szerint fejtjük ki a mátrixot, egyszerűen csak egy előjeles aldeterminánst kell kiszámolnunk,

$$A_{32} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -(12 - 1 + 8 - 8 - 2 + 6) = -15,$$

vagyis a teljes determináns $\underline{\underline{A}}A = 2A_{32} = -30$.

7.11. Exercise. Határozzuk meg kifejtési tétel segítségével a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Fejtsük ki ismét azon oszlop/sor szerint, mely a legtöbb 0-át tartalmaz, ekkor érdemes a 3. oszlop szerint kifejteni. Ekkor csak két előjeles aldeterminánst kell kiszámítanunk, A_{33}, A_{43}:

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -3 - 6 + 6 - 8 + 1 + 18 = 8,$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -(-2 - 9 + 16 + 12 + 2 + 12) = -31,$$

ahonnan a teljes determináns egyszerűen $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot A_{33} + (-1) \cdot A_{43} = 8 + 31 = 39$.

8. Mátrix Inverz számítás

Definíció(inverz mátrix) Az $n \times n$-es valós $\underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix inverze $\underline{\underline{A}}^{-1}$, amire telejsül, hogy $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$, ahol $\left(\underline{\underline{1}}\right)_{ij} = \delta_{ij}$.
Kiszámítása:

$$\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{\det\left(\underline{\underline{A}}\right)} adj(A)_{ij}, \tag{8.1}$$

ahol $adj(A)_{ij}$ a j-edik sor és az i-edik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsa $\times(-1)^{j+i}$.

8.1. Exercise. Diagonális mátrix inverze az a mátrix, mely szintén diagonális egyszerűen a főátlóban lévő elemek reciprokával, vagyis legyen most 3×3-as esetben

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

ekkor az inverz mátrix egyszerűen

$$\left(\underline{\underline{A}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix}.$$

8.2. Exercise. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

A determináns egyszerűen $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = ad - bc$, illetve az előjeles aldeterminánsok rendre $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$. Vagyis az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

8.3. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A fentiek alapján ekkor az inverz mátrix (a determináns $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 3 - 7 = -4$):

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & \sqrt{3} - 2 \\ -2 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

8.4. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = 4 + 4 + 3 = 11$. Illetve az előjeels aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4,\ A_{12} = -\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2,\ A_{13} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -8,\ A_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 7,\ A_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 7,\ A_{32} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 7,\ A_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

8.5. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = 6 + 6 = 12$. Illetve az előjeles aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -9,\ A_{12} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 6,\ A_{13} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$A_{21} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 6,\ A_{22} = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -4,\ A_{23} = -\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3,\ A_{32} = -\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2,\ A_{33} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -9 & 6 & 6 \\ 6 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

8.6. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = 1 - (1+i)(1-i) + i^2 = -2$. Illetve az előjeles

aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ A_{12} = -\det \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} = i,\ A_{13} = \det \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = i-1$$

$$A_{21} = -\det \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -i,\ A_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} = -1,\ A_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = -1-i$$

$$A_{31} = \det \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1-i,\ A_{32} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = 2,\ A_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & -1 & 2 \\ i-1 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$$

9. Gauss elimináció

9.1. Gauss-elimináció egyenletrendszerek megoldására

A következőkben lineáris egyenletrendszerek megoldására fogjuk alkalmazni a Gauss-eliminációt. Tekintsük példaként a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x - 2y + z &= 3 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásának a menete a következő lépésekből áll:

1. **Mátrix megalkotása:** Először írjuk fel az együtthatókat mint egy 3×3-as mátrixot, majd vegyük hozzá 4. oszlopként az egyes egyenletek értékét, vagyis
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$
Ekkor az adott soroknak vehetjük a *lineáris kombinációjukat*, amivel az egyenletrendszer ekvivalens marad, hiszen csak az egyenleteket adtuk össze, illetve vettük azok adott számszorosát. Célunk, hogy addig alakítsuk a sorokat míg a végén a 3×3-as részt az egységmátrix alakjára hozzuk[5], ekkor nyomon követve az utolsó oszlopban található értékek változását a három változó értéke éppen azokkal fog megegyezni.

2. **Mátrix sorainak alakítása:** Először adjuk hozzá az 1. sor -2-szeresét a 2. sorhoz, illetve -1-szeresét a 3. sorhoz, amivel kimulláztuk a 2. és 3. sor első elemeit:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right]$$
Most nullázzuk ki a 3. sor 2. elemét, vagyis levonjuk a 2. sor 1/3-szorosát a 3. sorból:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -1/3 & -4/3 \end{array}\right]$$

[5] A sorok lineárkombinációja során minden lépésben értelmezhetjük a mátrix elemeit mint egyenletrendszert, így a megoldást akkor is leolvashatjuk ha a mátrix minden sora csak egy nullától különböző elemet tartalmaz.

Most visszafele haladunk és kinulázzuk a felső háromszög részben maradt nem nulla elemeket, ehhez először hozzáadjuk a 3. sor 21-szeresét a 2. sorhoz, illetve a -9-szeresét az 1. sorhoz, ami után

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -6 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & -1/3 & -4/3 \end{array}\right]$$

utolsó lépésként pedig adjuk hozzá a 2. sor $1/3$-szorosát az 1. sorhoz, illetve vegyük a 2. sor $-1/6$-szorosát és a 3. sor -3-szorosát, ahonnan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 5.5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

3. **Megoldások leolvasása:** Ez egyértelműen mutatja, hogy $x = -19$, $y = 5.5$, $z = 4$.

9.1. Exercise. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 6 \\ 7x + 8y &= 9. \end{aligned}$$

Ennek megfelelő mátrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

$-7/4 \times$ 1.sor+2. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3/4 & -3/2 \end{array}\right]$$

$20/3 \times$ 2. sor+1. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -3/4 & -3/2 \end{array}\right]$$

ahonnan $x = -1$, $y = 2$.

9.2. Exercise. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 5z &= 6 \\ 7x + 8y + 8z &= 10 \end{aligned}$$

A megfelelő mátrixos alak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 10 \end{array}\right]$$

$-4 \times 1.$ sor+2. sor, illetve $-7 \times 1.$ sor+3. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & -11 \end{array}\right]$$

$-1 \times 2.$ sor+3. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$-1 \times 3.$ sor+2. sor, illetve $2/3 \times 3.$ sor+1. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$-1 \times 2.$ sor+1. sor, illetve $-3/5 \times 3.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right]$$

vagyis $x = -11/3$, $y = -4$, $z = 5/3$.

9.3. Exercise. Mutassuk meg a következő egyenletrendszerről, hogy bár több egyenletünk van, mint ismeretlenünk mégis egyértelműen megoldható!

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ -2x + y &= 2 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

A mátrixos alak:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$2 \times 1.$ sor $+$ 2. sor és $-1 \times 1.$ sor $+$ 3. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

Most $1 \times 2.$ sor $+$ 3. sor, ahonnan látható, hogy a harmadik sor csupa nullából fog állni, ami így nem képez tiltott sort, vagyis elhagyhatjuk és elegendő csupán az első két sort vizsgálnunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$-3/5 \times 2.$ sor $+$ 1. sor, illetve ezt követően 2. sor $\to -1/5 \times 2.$ sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ahonnan a megoldás már egyértelmű: $x = -7/5$, $y = -4/5$.

9.2. Gauss-elimináció mátrixok invertálására

Hasonlóan működik mint a lineáris egyenletrendszerek megoldása esetében, azonban itt az invertálandó mátrix mellé nem csak egy *eredmény* vektort veszünk, hanem n-et ahol az i-edik oszlopban csak az i-edik tag nem nulla, ezen elem értéke 1, vagyis a megfelelő méretű egységmátrixot.

9.4. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ekkor kiegészítjük még jobb oldalról a 3×3-as egységmátrixszal és a sorok megfelelő lineáris kombinációjával megpróbáljuk 3×3-as egységmátrix alakra hozni a bal oldali mátrixot, ekkor a jobb oldalon kialakuló mátrix adja meg az inverz mátrixot!

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$-4 \times 1.$ sor $+2.$ sor, 1. sor+3. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$2/3 \times 2.$ sor+3. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -5/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right]$$

$-6 \times 3.$ sor+2. sor, $-5/2 \times 3.$ sor+1. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -5/2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -5/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right]$$

Végül mindegyik sort szorozzuk meg úgy, hogy az egységmátrixot kapjuk meg:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 1/3 & 1 \end{array}\right].$$

Ekkor az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverzét a jobb oldalon leolvashatjuk.

9.5. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$-1 \times 1.$ sor $+$ 3. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$-4 \times 2.$ sor $+$ 3. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$1/2 \times 3.$ sor $+ -1 \times 3.$ sor $+ 1.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

2. sor + 1. sor, illetve azért, hogy megkapjuk baloldalt az egységmátrixot, $3 \to 1/2 \times 3.$ sor, $1 \to 1/4 \times 1.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & 3/4 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

vagyis az inverz mátrix:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & 3/4 & -1/8 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

9.6. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Látszik, hogy itt a "szokásosnál" jóval könnyebb dolgunk van, hiszen egy felső háromszög mátrixot kell csak invertálnunk! $2 \times 3.$ sor + 2. sor és $-7 \times 3.$ sor + 1. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$2 \times 2.$ sor + 1. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

vagyis az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Sajátértékek és sajátvektorok

10.1. Definition (Sajátérték, sajátvektor)**.** *az* $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ *mátrix* $\underline{v} \in \mathbb{V}$ *sajátvektorához tartozó sajátértéke,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *vagy* $\mathbb{R}$*, ha*

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}, \;\; \underline{v} \neq \underline{0}. \tag{10.1}$$

Sajátérték meghatározsása: A karakterisztikus egyenlet,

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = 0, \tag{10.2}$$

megoldásai szolgáltatják, majd az adott λ_i *sajátértékhez tartozó sajátvektort a*

$$\big(\underline{\underline{A}} - \lambda_i\mathbb{I}\big)\;\underline{v}_i = 0 \tag{10.3}$$

egyenlet alapján határozhatjuk meg.

10.1. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátvektorait és sajátértékeit:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \to \lambda_{1,2} = 5/2 \pm \sqrt{25/4 + 14} = 5/2 \pm 9/2 \to \lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2.$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_1 : \;\; \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Bár ez két egyenlet, de ezek *ekvivalensek* egymással, azaz csak a két komponens között adnak egy összefüggést, az első komponensből származó egyenlet alapján $x = y$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t(1,1)$, ahol $t \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám, ezt nevezzük az sajátvektor által kifeszített altérnek! A második sajátvektor:

$$\lambda_2 : \;\; \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \to 5x = 4y \to y = 5/4x$$

Innen a második sajátvektor: $\underline{v}_2 = t(1, 5/4)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.2. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátvektorait és sajátértékeit:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2i \\ 2i & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \to \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5.$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ismét csak egy összefüggés adódik a két komponens között, ami a fentebbi egyenlet alapján $x = 2iy$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t(2i, 1)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
A második sajátvektor:

$$\lambda_2 : \quad \begin{bmatrix} -4 & -2i \\ 2i & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \to x = -i/2y$$

Innen a keresett sajátvektor: $\underline{v}_2 = t(i/2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.3. Exercise. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy az alábbi mátrix sajátvektorai ortogonálisak legyenek egymásra:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = \frac{1}{3}\det\left(\begin{bmatrix} 1-3\lambda & p \\ -1 & 1-3\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-3\lambda)(1-3\lambda) - p = 0$$
$$1 - 3\lambda = \pm\sqrt{p} \to \lambda_\pm = \frac{1 \mp \sqrt{p}}{3}$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_+ : \quad \begin{bmatrix} \sqrt{p} & p \\ 1 & \sqrt{p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Az összefüggés a komponensek között az első egyenlet alapján $-\sqrt{p}x = y$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t\big(1, -\sqrt{p}\big)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
A második sajátvektor ugyanaz lesz mint az első csak most a $-\sqrt{p}$ értékkel: $\underline{v}_2 = t\big(1, \sqrt{p}\big)$. A két sajátvektor ortogonális, ha $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1 - p = 0 \to p = 1$.

10.4. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned}\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) &= \det\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7-3\lambda & 2i & 0 \\ 2i & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-3\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{27}(7-3\lambda)(2-3\lambda)(9-3\lambda) + \frac{4}{27}(9-3\lambda) \\ &= (3-\lambda)((7-3\lambda)(2-3\lambda)+4) = 0\end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek egy megoldása biztosan a $\lambda_1 = 3$ a szorzat első tagja alapján, a másik kettőt pedig az $(7-3\lambda)(2-3\lambda)+4 = 9\lambda^2 - 27\lambda + 18 = (3\lambda-6)(3\lambda-3) = 0$ másodfokú egyenlet szolgáltatja, ahonnan $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$.
Innen a sajátvektorok rendre:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Látható, hogy a z komponensre nem kapunk összefüggést, vagyis annak értéke tetszőleges, ez paraméterezi a sajátvektort, míg az x, y komponensre egyértelmű eredményt kapunk az első egyenlet alapján: $x = iy$, illetve a második egyenlet alapján $x = -7iy \to x = 7x \to x = 0, y = 0$.
Innen $\underline{v}_1 = t(0,0,1)$, $t \in \mathbb{C}$.

$$\lambda_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 2i & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

A harmadik komponensre vonatkozó egyenlet alapján $z = 0$, illetve ekkor az első két egyenlet ekvivalens lesz egymással és csak az első két komponens közötti összefüggést adja meg, vegyük most az első egyenletet, $x = -2iy$, látható, hogy ez a második egyenletet is kielégíti!
Innen a második sajátvektor $\underline{v}_2 = t(-2i, 1, 0)$, $t \in \mathbb{C}$.

$$\lambda_3 : \quad \begin{bmatrix} 4 & 2i & 0 \\ 2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ismét a harmadik komponensre vonatkozó egyenlet alapján $z = 0$ és így az első két egyenlet az x, y komponensek közötti összefüggést adja meg,

hagyva egy szabad paramétert. Az első komponensre vonatkozó egyenlet alapján $y = 2ix$, látható, hogy ez kielégíti a második egyenletet is! Innen a harmadik sajátvektor $\underline{v}_3 = t(1, 2i, 0)$, $t \in \mathbb{C}$.

10.5. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (4-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)((4-\lambda)(4-\lambda) - 1) = 0$$

Ennek az egyenletnek egy megoldása biztosan a $\lambda_1 = 2$ a szorzat első tagja alapján, a másik kettőt pedig a $(4-\lambda)^2 - 1 = 0$ egyenletből kaphatjuk meg, ahonnan $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$.
Innen a sajátvektorok rendre:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ismét csak két egyenletet kell megoldanunk, hiszen a második komponensre felírandó egyenlet triviális, csupa nulla együtthatókkal! Az első és harmadik komponensre felírt egyenletek alapján:

$$\begin{aligned} &2x = -4y - z \\ &x + 2y + 2z = 0 \to = z = 0,\ x = -2y \end{aligned}$$

Innen $\underline{v}_1 = t(-2, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ahonnan ismét az első kettő egyenlet szolgáltatja az összefüggést a három komponens között:

$$\begin{aligned} &x + z = 0 \to x = -z \\ &y = 0 \end{aligned}$$

Innen a második sajátvektor $\underline{v}_2 = t(1, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_3 : \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ahol ismét először kihasználjuk, hogy a második egyenlet alapján $y = 0$:

$$\begin{aligned} -x + 4y + z &= 0 \\ y = 0 &\to x = z \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

Innen a második sajátvektor $\underline{v}_3 = t(1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.1. Diagonális mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Diagonális mátrixoknál korábban láttuk, hogy azok determinánsa a diagonális elemek szorzatával egyenlő. Ennek okán a karakterisztikus sajátérték egyenlet felírásakor

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$$

szorzatot kapjuk, ahol a_{ii} az $\underline{\underline{A}}$ mátrix diagonális elemeit jelöli.

10.1. Example. 1. Adott a következő mátrixunk

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}. \tag{10.4}$$

Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = (7 - \lambda)(9 - \lambda)(11 - \lambda) = 0 \tag{10.5}$$

egyenletből rögtön leolvasható a karakterisztikus egyenlet három gyöke: $\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = 11.$

A mátrix alakjából azonnal látszik, hogy milyen szerkezetűek lesznek a sajátvektorok:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.6}$$

Ebből a következő három egyenlet adódik

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 0z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ 4z &= 0 \end{aligned}$$

Látható, hogy ez bármilyen x esetén teljesül a $y = 0$ és $z = 0$ megkötés mellett. Így a normált, első sajátértékhez tartozó sajátvektor a

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

Látható, hogy felírva a második és harmadik sajátértékhez tartozó egyenleteket alakra ugyan ilyen egyenleteket kapunk. Így a maradék két sajátvektort (normálva) a következő alakban írhatjuk fel:

$$v_2 = (0, 1, 0)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

10.2. Felső és alsó △ mátrixok

Felső és alsó háromszög mátrixok esetén azok determinánsának kiszámítása ugyan úgy zajlik mint a diagonális mátrixok esetén , tehát a főátlóbeli elemek szorzata adja azt.

10.2. Example.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{(kifejtve az első oszlop szerint)} \rightarrow \det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = (1-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) = 0 \tag{10.7}$$

Ismételten a sajátértékeket leolvashatjuk a főátlóból: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 2$. A sajátvektorok esetén - ha azokat a főtálóban fentről lefelé indexeltük meg - azt találjuk *általánosan*, hogy az elsőnek egy eleme különbözik nullától, a másodiknak kettő és a harmadiknak mindhárom eleme véges lesz.

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned} 0x + 2y + 3z = 0 \qquad & \rightarrow y = -3/2z, \quad x \in \mathbb{R} \\ 0x + 4y + 3z = 0 \qquad & \rightarrow y = 0 \\ 0x + 0y + 1z = 0 \qquad & \rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

Az első, normált sajátvektor tehát:

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

$$\lambda_2 = 5: \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned} -4x + 2y + 3z = 0 \qquad & \rightarrow y = 2x \\ 0x + 0y + 3z = 0 \qquad & \rightarrow z = 0 \\ 0x + 0y + -3z = 0 \qquad & \rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

legyen $x = 1$. Ekkor $y = 2$, az egyenletek alapján pedig $z = 0$, tehát a sajátvektor.

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}}(1, 2, 0)$$

$$\lambda_3 = 2: \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.10}$$

$$\begin{aligned} -1x + 2y + 3z &= 0 \qquad \to x = -y \\ 0x + 3y + 3z &= 0 \qquad \to y = -z \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \qquad \to z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Itt pedig a sajátvketor mindhárom eleme nullától különbözőnek adódott:

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1}}(1, -1, 1)$$

Transzponált mátrixok sajátértékei Itt érdemes megjegyezni, hogy egy mátrix transzponáltjának sajátértékei megegyeznek a nem transzponált mátrix értékeivel.

10.3. Example (Felső hármoszögmátrix transzponáltja)**.** Az előző példában szereplő felső háromszögmátrix transzponáltja egy alsó háromszögmátrixot ad, melynek főátlójában az elemek nem változnak meg, így sajátértékeik megegyeznek.

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{10.11}$$

10.3. Inverz mátrixok

Ha egy mátrix invertálható, tehát zérustól különböző a determinánsa, akkor azon mátrix sajátértékei megegyeznek az eredeti mátrix sajátértékeinek reciprokával, amellett, hogy sajátvektorai nem változnak meg.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}\,\underline{v} &= \lambda \underline{v} \quad \text{Szorozzuk meg mindkét oldalt a mátrix inverzével balról}(\underline{\underline{M}}^{-1}\cdot) \\ \mathbb{I}\underline{v} &= \lambda\, \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{v} \\ \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{v} &= \frac{1}{\lambda}\underline{v} \end{aligned}$$

Legegyszerűbb példa erre egy diagonális mátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \to \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{bmatrix}$$

Sajátérvektorai pedig változatlanok maradtak.

Kevésbé triviális példa: Legyen a mátrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus egyenlete: $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$, melynek két megoldása : $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$. Az ezekhez tartozó sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.12}$$

Ez az $x = -y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.13}$$

Ez az $x = y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

Most invertáljuk a mátrixot és végezzük el ugyanezen lépéseket.

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$9\lambda^2 - 12\lambda + 3 = 0 \quad \rightarrow \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 * 3 * 9}}{18} = \frac{12 \pm 6}{18} = 1 \text{ és } 1/3$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.14}$$

Ez az $x = y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

$$\lambda_2 = 1/3: \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.15}$$

Ez az $x = -y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

11. Spectrálfelbontás és diagonalizáció

Egy $\underline{\underline{A}}$ diagonalizálható ha létezik olyan $\underline{\underline{P}}$ és $\underline{\underline{P}}^{-1}$ mátrixok melyekre teljesül, hogy

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1},$$

ahol 'D' egy diagonális mátrix melynek főátlójában az 'A' mátrix sajátértékei találhatóak, a 'P' mátrix pedig az 'A' mátrix sajátvektorait tartalmazza. Elégséges feltétele a diagonalizációnak az, hogy egy $n \times n$ mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van.

11.1. Example. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus polinomja:

$$0 = -6 - 3\lambda + \lambda^2$$

Ennek leolvashatjuk a megoldásait, amik $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 4$. Ezek ismeretében a 'D' mátrixot a következő alakban írhatjuk fel:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

Most a sajátvektorokból megalkotjuk a 'P' mátrixot:

$$\lambda_1 = 1: \qquad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \to v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

$$\lambda_2 = 3: \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \to v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Ezek ismeretében a 'P' mátrix - a normálási faktorokat itt most elhagyom:

$$\underline{\underline{P}} = (\vec{v_1}\,\vec{v_2}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P}}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Ennek ellenőrzésére:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \tag{11.5}$$

megoldásával történik.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \\
&= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

alternatívaként:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \quad \text{szorozzuk meg 'P' vel jobbról} \\
\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}(I) \quad \text{szorozzuk meg 'P' inverzével balról} \\
\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \mathbb{I}\,\underline{\underline{D}}\mathbb{I} \\
\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{D}}
\end{aligned}$$

A fent említett elégséges feltétel láthatóan nem teljesül tetszőleges mátrixokra. Például egy diagonális mátrix melynek nem mindegyik eleme különbözik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrixnak sajátértékei: 1, 2 és 1, tehát 'D' mátrix megegyezik a diagonalizálandó mátrixxal. A 'P' mátrixok pedig a standard bázisvektorokból épül fel, tehát az $n \times n$ dimenziós egységmátrixxal egyeznek meg.

Ha példaként a

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot vesszük, akkor láthatjuk, hogy sajátértéke degenerált, tehát $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, amikkel ha meghatározzuk a sajátvektorokat (és normáljuk azokat) akkor $v_1 = v_2 = (1, 0)$ vektorokat kapjuk. Nincs két független báziselem, 'P' nem invertálható, így nem tudjuk diagonalizálni a mátrixot.

11.0.1. Mátrix függvények

Ha meg akarjuk határozni egy mátrix egy tetszőleges hatványát, akkor a diagonalizált mátrix felírás megkönnyítheti a dolgunkat. Legyen a mátrixunk most $\underline{\underline{X}}$. Feltéve, hogy X diagonalizálható felírhatjuk azt

$$X = PDP^{-1} \tag{11.6}$$

$$f(X) = X^n \tag{11.7}$$

Legyen most $n = 2$:

$$f(X) = XX = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\mathbb{I}DP^{-1} = PD^2P^{-1} \tag{11.8}$$

Láthatjuk, hogy csak a diagonális résszel kell elvégeznünk a négyzetre emelést, ami annak elemei négyzetre emelésével megkapható. Innen $n = 3$ ugyan így következik:

$$X^3 = X^2X = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2\mathbb{I}DP^{-1} = PD^3P^{-1} \tag{11.9}$$

tetszőleges n esetére pedig:

$$f(X) = PD^nP^{-1} \tag{11.10}$$

Másik példaként ha $\exp(X)$-re lennénk kiváncsiak, akkor definíció szerint:

$$\exp(X) := \sum_{k=0}^{\inf} \frac{1}{k!} X^k \tag{11.11}$$

X helyére beírva annak spektrálfelbontását:

$$\exp\left(PDP^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{\inf} \frac{1}{k!} (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\inf} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} = P\exp(D)P^{-1} \tag{11.12}$$

legyen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ekkor

$$\exp(D) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^7 \end{bmatrix}$$

12. Taylor sorfejtés

Taylor sornak nevezzük azt a végtelen sort, mely egy valós (vagy komplex) függvény adott pontban meghatározott derivált értékekből állítja elő a függvényt. Legyen $f(x)$ egy valós vagy komplex, differenciálható és folytonos függvény. Ekkor ennek Taylor sora

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \tag{12.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{12.2}$$

ahol a egy tetszőleges pont[6] ahol értelmezhető az $f(x)$ függvény és deriváltja, továbbá $f^{(n)}(x)$ a függvény n-ik derivátját jelöli.

Láthatjuk ha az összegzést csak véges számú derivált értékre végezük el, hogy azok egy polinom formályában közelítik a függvényt

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k \tag{12.3}$$

12.1. Alapvető Taylor sorok

12.1. Example ($\sin(x)$)**.** Határozzuk meg $\sin(x)$ deriváltjait, helyettesítsük be a pontot ami körül sorbafejtjük a függvényt végül alkalmazzuk a fenti Taylor sor összefüggését.

$$\frac{\mathrm{d}\,\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \tag{12.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \tag{12.5}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\,\sin(x)}{\mathrm{d}x} = -\cos(x) \tag{12.6}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\,\cos(x)}{\mathrm{d}x} = \sin(x). \tag{12.7}$$

[6] Ha $a = 0$, akkor szokás a Taylor sort Maclaurin sornak is nevezni

Mivel $\sin(0) = 0$ és $\cos(0) = 1$, láthatjuk, hogy a Taylor sor bizonyos tagjai nullát adnak majd. Felírva a definíciót

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \dots \tag{12.8}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{12.9}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{12.10}$$

12.2. Example ($\cos(x)$)**.** Hasonlóan az előző példához, könnyen felírhatjuk $\cos(x)$ taylor sorát is $a = 0$ körül

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{12.11}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{12.12}$$

12.3. Example (e^x)**.**

$$e^x = e^a \left((x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \right) \tag{12.13}$$

$$= 1 \left((x) + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \dots \right) \tag{12.14}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{12.15}$$

12.4. Example ($\ln(x)$)**.**

$$\frac{\mathrm{d}\ \ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\mathrm{d}^2\ \ln(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-1}{x^2}; \quad \frac{\mathrm{d}^3\ \ln(x)}{\mathrm{d}x^3} = \frac{-2}{x^3} \tag{12.16}$$

Válasszuk most a tetszőleges pontot $a = 1$-nek.

$$\ln(x) = \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2!}\frac{-1}{1^2}(x-1)^2 + \dots \tag{12.17}$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-3)^3 + \dots \tag{12.18}$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} \tag{12.19}$$

12.5. Example ($\ln(1-x)$ és $\ln(1+x)$)**.**

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \tag{12.20}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \tag{12.21}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \tag{12.22}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \tag{12.23}$$

12.1. Exercise $(\ln(2 + cos(x)))$**.** Határozzuk meg a fenti függvény Taylor sorát másod rendig $a = 0$ körül.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(2+\cos(x)) = \frac{1}{2+\cos(x)}(-\sin(x)) \tag{12.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln(2+\cos(x)) = (-2)\frac{(-\sin(x))^2}{(2+\cos(x))^2} - \frac{1}{2+\cos(x)}(\cos(x)) \tag{12.25}$$

$$\ln(2+\cos(x)) \approx \ln(3) - \frac{1}{3!}x^2 \tag{12.26}$$