Bevezető Kalkulus

Szombathy Dominik*

Tartalomjegyzék

*Karban tartja Svastits Domonkos

1. Deriválás

1.1. Deriválás definíció szerint

Deriválás, gyors definíció és példa a kiszámítására : Az x_0 pontban vett derivált definíció alapján a következő módon számítható ki

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \tag{1.1}$$

ahol a határérték alapján kell kiszámítanunk a fenti értéket adott x_0 pontban. Néhány egyszerű függvény példaként:

- $f(x) = x^3$

  $$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3\Delta x x_0^2 + 3\Delta x^2 x_0 + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x} \tag{1.2}$$

  Véve az $\lim_{\Delta x \to 0}$ határértéket, látható, hogy a számlálóban csak a lineáris tag együtthatója marad, hiszen a Δx-el való egyszerűsítés után, minden további tagban marad még, legalább első hatványon, egy Δx-el arányos kifejezés, amivel azonban nullába tartunk. Így azok a tagok eltűnnek a limesz képzés után. Vagyis:

  $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2 = 3x_0^2. \tag{1.3}$$

- $f(x) = \sin(x)$
  Felhasználjuk, hogy tudjuk a következő határértéket: $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$[1],
  illetve $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0$[2]
  Így használva a szinuszra vonatkozó addíciós tételt

  $$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \tag{1.4}$$

  a következő adódik:

  $$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x_0) + \cos(\Delta x)\sin(x_0) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \dots \\ &\dots = \lim_{\Delta x\to 0} \cos(x_0)\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \sin(x_0)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \end{aligned} \tag{1.5}$$

  Az első tag egyértelműen egyszerűen $\cos(x_0)$, míg a második tag, fentebbi határértékek alapján egyszerűen nulla, összességében tehát $f'(x_0) = \cos(x_0)$.

[1] ld. egységkörön vett kisebb, nagyobb relációja a $\sin(x)$, x és $\tan(x)$ függvényeknek.
[2] könnyen belátható, ha bővítjük a törtet 1-el,azaz $\frac{cos(\Delta x)+1}{cos(\Delta x)+1}$ -el.

- $f(x) = e^x$
  Ennek a deriváltnak a kiszámításához felhasználjuk, hogy $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$.
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \tag{1.6}$$
  Felhasználva a fentebbi határértékre vonatkozó azonosságot, a derivált egyszerűen $f'(x_0) = e^{x_0}$.

további példák gyakorlásra:

- $f(x) = x^3 + x^2 + c$, ahol c egy constans.
- $f(x) = cos(x)$
- $f(x) = e^{c \cdot x}$

1.2. Deriválás alapszabályai

Konstans függvény deriváltja

Konstans vagy állandó értékű függvény deriváltja 0:

$$f(x) = c \qquad \to \qquad f'(x) = 0 \tag{1.7}$$

Két füffvény összegének deriváltja

$$f(x) = (g(x) + h(x)) \qquad \to \qquad f'(x) = g'(x) + h'(x) \tag{1.8}$$

Szorzatfüggvény deriváltja

$$f(x) = g(x)h(x) \qquad \to \qquad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \tag{1.9}$$

Összetett függvény deriváltja

$$f(x) = g(h(x)) \qquad \to \qquad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \tag{1.10}$$

(1.7) és (1.9) szabályok értelmében

$$f(x) = c \cdot g(x) \qquad \to \qquad f'(x) = c \cdot g'(x) \tag{1.11}$$

1.3. Alapderiváltak

Hatványfüggvények deriváltja

$$f(x) = ax^{\gamma} \qquad \to \qquad f'(x) = a\gamma x^{\gamma-1}, \tag{1.12}$$

ahol a és γ egy nullától különböző konstans. Amennyiben $\gamma = 0$ a derivált eltűnik.

Felhasználva az összegfüggvényekre vonatkozó deriválási szabályt (1.8), polinomok deriváltját a következő alakban írhatjuk fel:

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r \cdot x^r \qquad \to \qquad P_n'(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r \cdot r \cdot x^{r-1}, \tag{1.13}$$

ahol $P_n(x)$ egy n-ed fokú polinom, c_r pedig az egyes hatványokhoz tartozó szorzófaktorok.

Exponenciális függvény deriváltja

$$f(x) = e^x \qquad \to \qquad f'(x) = e^x \tag{1.14}$$

$$f(x) = e^{cx} \qquad \to \qquad f'(x) = ce^{cx} \tag{1.15}$$

Lagoritmus deriváltja

$$f(x) = ln(x) \qquad \to \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \tag{1.16}$$

trigonometrikus függvények deriváltja

$$f(x) = \sin(x) \qquad \to \qquad f'(x) = \cos(x) \tag{1.17}$$

$$f(x) = \cos(x) \qquad \to \qquad f'(x) = -\sin(x) \tag{1.18}$$

$$f(x) = \tan(x) \qquad \to \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \tag{1.19}$$

$$f(x) = \cot(x) \qquad \to \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \tag{1.20}$$

1.4. Hiperbólikus függvények deriváltjai

Legyenek a, b és c valós konstansok.

- $f(x) = \sinh(x)$

$$f(x) = a\sinh(bx) = \frac{a}{2}\left(e^{bx} - e^{-bx}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{a}{2}\left(be^{bx} - (-b)e^{-bx}\right) = a{\cdot}b\cosh(bx) \tag{1.21}$$

- $f(x) = \cosh(x)$

$$f(x) = \cosh(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \sinh(x) \tag{1.22}$$

e^{bx} deriválásánál az összetett függvényekre vonatkozó deriválási szabályt (1.10) alkalmaztuk.

- $f(x) = \tanh(x)$

$$f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{\cosh(x)}{\cosh(x)} + \frac{\sinh^2(x)(-1)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \tag{1.23}$$

1.5. További függvények deriváltja

- $f(x) = a^x$

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a)^x}\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)} * (x\ln(a))' = e^{x\ln(a)}\ln(a) = \ln(a)\ a^x. \tag{1.24}$$

Ennél a példánál ismét az összetett függvény deriválására vonatkozó szabályt használtuk fel. Ahol a külső függvény $f(x) = e^x, (f(x))' = e^x$, míg belső függvény $g(x) = x\ln(a), (g(x))' = \ln(a)$.

- $f(x) = x^x$

$$\left(\left(e^{\ln(x)}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)} * (x\ln(x))' = x^x * (1 + \ln(x)) \tag{1.25}$$

Itt ismét először az összetett függvény deriválására vonatkozó szabályt használtuk fel, majd a $(x * \ln(x))'$ deriválás elvágzésekor a függvények szorzatára vonatkozó szabályt alkalmaztuk, azaz $(x * \ln(x))' = (x)' * \ln(x) + x(\ln(x))' = 1 * \ln(x) + x * \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

- Honnan tudtuk megmondani, hogy a logaritmus deriváltja, azaz az exponenciális függvény inverz függvényének deriváltja $(\ln x)' = \frac{1}{x}$?
  Ha ismert az $(f(x))'$ derivált, az inverz függvény, $f^{-1}(x) : f\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}(f(x)) = x$, deriváltja:

$$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

  vagyis vesszük az eredeti függvény deriváltját és azt az $f^{-1}(x)$ pontban értékeljük ki.
  Ez alapján a logaritmus deriváltja úgy számítható ki, hogy ha $f(x) = e^x$, akkor $f^{-1}(x) = \ln(x)$, hiszen $e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$ a logaritmus definíciója alapján.

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^x)'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

- $f(x) = sin(x)^{\sin(x)}$

$$\Big((\sin(x))^{\sin(x)}\Big)' = \Big(e^{\sin(x)\,\ln(\sin(x))}\Big)' = e^{\sin(x)\,\ln(\sin(x))}\,(\sin(x)\,\ln(\sin(x)))' \tag{1.26}$$

$$= (\sin(x))^{\sin(x)}\,(\cos(x)\ln(\sin(x)) + \cos(x)) \tag{1.27}$$

$$= (\sin(x))^{\sin(x)}\,\cos(x)\,(1 + \ln(\sin(x))) \tag{1.28}$$

  . Itt ismét a függvények szorzatára vonatkozó deriválási szabályt alkalmaztuk, illetve elvégeztük, az alábbi összetett függvény deriválását, $(\ln(\sin(x)))' = \frac{1}{\sin(x)} * \cos(x) = \mathrm{ctg}(x)$, aho la külső függvény az $f(x) = \ln(x)$, míg a belső függvény a $g(x) = \sin(x)$ és $(f(x))' = \frac{1}{x}$, illetve $(g(x) = \cos(x))'$.

- $f(x) = \arctan(x)$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{(\tan(x))'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{1+x^2} \tag{1.29}$$

  Az utolsó nevező kiszámításához egyrészt felhasználtuk a tangens függvény deriváltjára vonatkozó eredményt, illetve mivel tudjuk, hogy $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, a nevezőben maradó tag $1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2$ az inverz függvény definíciója miatt.

- $f(x) = \arcsin(x)$

$$(\mathrm{arsinh}(x))' = \frac{1}{(\sinh(x))'(\mathrm{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\mathrm{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\mathrm{arsinh})(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{1.30}$$

1.6. Gyakorlópéldák deriválásra:

- $\left((\sin(x))^{\sin(x)}\right)' = \left(e^{\sin(x)\ln(\sin(x))}\right)' = e^{\sin(x)\ln(\sin(x))} * (\sin(x) * \ln(\sin(x)))' =$ $(\sin(x))^{\sin(x)} * (\cos(x)\ln(\sin(x)) + \cos(x)) = (\sin(x))^{\sin(x)} * \cos(x) * (1 + \ln(\sin(x)))$. Itt ismét a függvények szorzatára vonatkozó deriválási szabályt alkalmaztuk, illetve elvégeztük, az alábbi összetett függvény deriválását, $(\ln(\sin(x)))' = \frac{1}{\sin(x)} * \cos(x) = \mathrm{ctg}(x)$, aho la külső függvény az $f(x) = \ln(x)$, míg a belső függvény a $g(x) = \sin(x)$ és $(f(x))' = \frac{1}{x}$, illetve $(g(x) = \cos(x))'$.

- $(\arctan(x))'$: Mint tudjuk ez a függvény a tangens inverz függvénye, $\arctan(\tan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$. Vagyis $f^{-1}(x) = \arctan(x)$, illetve $f(x) = \tan(x)$. Alkalmazva az inverz függvény deriválására vonatkozó szabályt:

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{(\tan(x))'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Az utolsó nevező kiszámításához egyrészt felhasználtuk a tangens függvény deriváltjára vonatkozó eredményt, illetve mivel tudjuk, hogy $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, a nevezőben maradó tag $1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2$ az inverz függvény definíciója miatt.

- $(\mathrm{arsinh}(x))'$: Itt az $\mathrm{arsinh}(x)$ függvényre ismét mint inverz függvényre tekintünk, $f(x) = \sinh(x)$, $f^{-1}(x) = \mathrm{arsinh}(x)$. Vagyis ismét alkalmazva az inverz függvény deriválására vonatkozó szabályt

$$(\mathrm{arsinh}(x))' = \frac{1}{(\sinh(x))'(\mathrm{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\mathrm{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\mathrm{arsinh})(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1.6.1. További gyakorló példák a $(f \circ g(x))'$, $(f(x) * g(x))'$, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ deriváltakra vonatkozó szabályok segítségével:

- $\left(\frac{\sin(x)+1}{\cos(x)-1}\right)' = \frac{(\sin(x)+1)' * (\cos(x)-1) - (\sin(x)+1) * (\cos(x)-1)'}{(\cos(x)+1)^2} = \frac{\cos(x) * (\cos(x)-1) - (\sin(x)+1) * (-\sin(x))}{(\cos(x)+1)^2} =$ $\frac{1-\cos(x)+\sin(x)}{(\cos(x)-1)^2}$

- $\left(\frac{x-1}{x^2}\right)' = \frac{(x-1)' * x^2 - (x-1) * \left(x^2\right)'}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$
- $\left(\frac{x^3+4}{1+2x}\right)' = \frac{\left(x^3+4\right)' * (1+2x) - \left(x^3+4\right) * (1+2x)'}{(1+2x)^2} = \frac{3x^2+4x^3-8}{(1+2x)^2}$
- $\left(\left(x^2+1\right)^4\right)' = 4\left(x^2+1\right)^3 * 2x$. Itt ismét a zösszetett függvény deriválási szabályt alkalmaztuk, ahol $f(x) = x^4, (f(x))' = 4x^3$, illetve $g(x) = x^2+1, (g(x))' = 2x$
- $\left(\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^5\right)' = 5\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^4 * \frac{x}{x+1}$. Ismét az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabályt alkalmaztuk, ahol $f(x) = x^5, (f(x))' = 5x^4$, illetve $g(x) = \frac{x^2+1}{x+1}, (g(x))' = \frac{\left(x^2+1\right)' * (x+1) - \left(x^2+1\right) * (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$
- $(\tan^n(x))' = n\tan^{n-1}(x) * \frac{1}{\cos^2(x)}$. Itt ismét az összetett függvény külső függvénye $f(x) = x^n, (f(x))' = n * x^{n-1}$, míg a belső függvény $g(x) = \tan(x), (g(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
- $(2\sin(x)\cos(x))'$: Itt két féleképpen járhatunk el:
  - Felismerjük, hogy $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, ahonnan a derivált már triviális, hiszen ez ismét egy összetett függvény, ahol a külső függvény $f(x) = \sin(x), (f(x))' = \cos(x)$, míg a belső függvény $g(x) = 2x, (g(x))' = 2$, vagyis összességében a $(2\sin(x)\cos(x))' = 2\cos(2x)$ eredmény adódik.
  - A másik megoldás, hogy a kifejezésre egyszerűen mint két függvény szorzatára tekintünk, ahonnan pedig a derivált $2(\sin(x))'\cos(x) + 2\sin(x)(\cos(x))' = 2\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right) = 2\cos(2x)$. Itt az utolsó lépésben alkalamztuk a kétszeres szög koszinuszára vonatkozó összefüggést.
- $\left(\left(x^2+2\right)\sin\left(\sqrt{x+3}\right)\right)' = \left(x^2+2\right)'\sin\left(\sqrt{x+3}\right) + \left(x^2+2\right)\left(\sin\left(\sqrt{x+3}\right)\right)' = 2x\sin\left(\sqrt{x+3}\right) + \left(x^2+3\right)\frac{\cos\left(\sqrt{x+3}\right)}{2\sqrt{x+3}}$. A második tagban ismét egy összetett függvényt kellett deriválnunk, ahol a külső függvény $f(x) = \sin(x)$, $(f(x))' = \cos(x)$, míg a belső függvény $g(x) = \sqrt{x+3}$, $(g(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$.
- $(\arctan(2x))' = 2\frac{1}{1+4x^2}$. Külső függvény $f(x) = \arctan(x), (f(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, belső függvény $g(x) = 2x, (g(x))' = 2x, (g(2x))' = 2$.
- $(x^e e^x)' = \left(e^{x+e\ln(x)}\right)' = e^{x+e\ln(x)} * (x + e\ln(x))' = x^e e^x * \left(1 + \frac{e}{x}\right)$. Itt a második lépésben ismételt módon a kifejezésre mint összetett függvéynre tekintettünk, ahol a külső függvény $f(x) = e^x, (f(x))' = e^x$, míg a belső $g(x) = x + e\ln(x), (g(x))' = 1 + \frac{e}{x}$.

- $\left(\sin^2(x)\, e^{x^2}\right)' = \left(\sin^2(x)\right)' e^{x^2} + \sin^2(x)\left(e^{x^2}\right)'$.
  A $\left(\sin^2(x)\right)'$ kiszámításánál a külső függvény $(f(x))' = \left(x^2\right)' = 2x$, míg a belső $(g(x))' = (\sin(x))' = \cos(x)$. Így a teljes derivált $\left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$.
  A második tag deriváltjának meghatározásakor a külső függvény $(f(x))' = (e^x)' = e^x$, míg a belső $(g(x))' = \left(x^2\right)' = 2x$, vagyis a végső kifejezés $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.
  Összerekva a két részeredményt, a következő adódik: $\left(\sin^2(x)\, e^{x^2}\right)' = \sin(2x)\, e^{x^2} + \sin^2(x)\, 2xe^{x^2}$

- $\left(\ln^2(\tanh(x))\right)'$: Ez egy háromszorosan összetett függvény: $f(g(h(x)))$, ahol $f(x) = x^2, ,(f(x))' = 2x$, $g(x) = \ln(x)\,,(g(x))' = \frac{1}{x}$, $h(x) = \tanh(x)\,,(h(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
  A háromszorosan összetett függvényt az korábban tanult összetett függvényekre vonatkozó szabály kétszeri alkalmazásával tujduk deriválni:
  $$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) * (g(h(x)))' = f'(g(h(x))) * g'(h(x)) * (h(x))'$$
  Beírva fenti deriváltakat, a következőt kapjuk: $\left(\ln^2(\tanh(x))\right)' = 2\ln(\tanh(x)) * \frac{1}{\tanh(x)} * \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{4\ln(\tanh(x))}{\sinh(2x)}$ (mivel $2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$).

- $\left((1+\sqrt{x})^{1/3}\right)'$: Itt a külső függvény $(f(x))' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, míg a belső $(g(x))' = (1+\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tehát a teljes derivált értéke: $\left((1+\sqrt{x})^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^{-2/3} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- $\left(\frac{\sinh(2x)}{\tanh(x)}\right)' = \left(2\cosh^2(x)\right)'$, itt felhasználtuk, hogy $2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$. Most látható módon ez egy összetett függvény $f(g(x))$, ahol a külső függvény $f(x) = x^2, f'(x) = 2x$, illetve a belső függvény $g(x) = \cosh(x)\,, g'(x) = \sinh(x)$.
  Innen a derivált $\left(\frac{\sinh(2x)}{\tanh(x)}\right)' = 2\sinh(2x)$, ahol ismét felhasználtuk, hogy $2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$.

- $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'$: ismét a külső függvény, $(f(x))' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$, míg a belső $(g(x))' = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = 1 + \left(\sqrt{x^2+1}\right)'$. Itt a másosdik derivált ismét egy összetett függvény, ahol a külső függvény $(f(x))' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, míg a belső $(g(x))' = \left(x^2\right)' = 2x$, vagyis összességében $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Ennek segítségével az eredeti deriváltat már ki lehet fejezni, $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1+x/\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

- $\left(\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}\right)\right)'$: A külső függvény $(f(x))' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$, a belső függvény $g(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}$. Ez útóbbinak a deriválásához ismét alkalmazzuk az összetett függvényekre vonatkozó szabályt, ahol a külső függvény $(f(x))' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, míg a belső függvény $\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x+1)-(x^2+1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$. Ismerve a belső függvény deriváltját az eredeti deriváltat:

$$\left(\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}\right)\right)' = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x^2+1}\frac{x^2+2x-1}{2(x+1)^2}$$

- $\left(e^{\ln(\text{ctg}(x))}\right)'$: Ez egy olyan összetett függvény, ahol a belső függvény ismét egy újabb összetett függvény: a külső függvény $(f(x))' = (e^x)' = e^x$, a belső függvény pedig, mint kijelentettük egy újjabb összetett függvény $(\ln(\text{ctg}(x)))' = \frac{1}{\text{ctg}(x)} * \left(\frac{-1}{\sin^2(x)}\right)$, hiszen a külső függvényre $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, míg a belső függvényre $(\text{ctg}(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$.
Vagyis összességében $\left(e^{\ln(\text{ctg}(x))}\right)' = e^{\ln(\text{ctg}(x))} * \frac{-1}{\sinh^2(x)\text{ctg}(x)} = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$.
Egyszerűbb megoldás, ismerjük fel, hogy $e^{\ln(\text{ctg}(x))} = \text{ctg}(x)$, ahonnan a derivált egyszerűen $\frac{-1}{\sinh^2(x)}$.

- $\left(\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right)'$: Itt is két féleképpen járunk el

  - Összetett függvény, ahol a külső függvény a logaritmus, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, a belső függvény egy további összetett függvény, $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)}$ ahol a külső függvény az exponenciális függvény $(e^x)' = e^x$, míg a belső függvény a $(\ln(x)\sqrt{x})' = \frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tehát a derivált összességében: $\frac{1}{x^{\sqrt{x}}}x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
  - Ismerjük fel, hogy a logaritmus tulajdonságai alapján $\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\ln(x)$, ami egy egszerű szorzata két függvénynek, illetve ennek deriváltja éppen az előző pontban kiszámolt belső függvény derivált, vagyis az eredmény ismét $\frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- $(\ln(\ln(x)))'$. Összetett függvény, ahol mind a külső, mind a belső függvény a logaritmus, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, vagyis a derivált $\frac{1}{x\ln(x)}$.

- $\left(\left(\ln^3\left(\ln^6\left(x^{1/5}\right)\right)\right)^{1/4}\right)'$: Alkalmazva a logaritmus azonosságait, ez a következő egyszerű alakra írható át:
$\left(6^{3/4}\ln^{3/4}\left(\frac{1}{5^6}\ln(x)\right)\right)'$, ismét összetet függvénnyel állunk szemben, ahol

a külső függvény $(f(x))' = \left(x^{3/4}\right)' = \frac{3}{4}x^{-1/4}$, belső függvény pedig a fentebb kiszámolt példa alapján $\left(\ln\left(5^{-6}\ln(x)\right)\right)' = \frac{1}{x\ln(x)}$. Összességében tehát a derivált $\left(\left(\ln^3\left(\ln^6\left(x^{1/5}\right)\right)\right)^{1/4}\right)' = \frac{3*6^{3/4}}{4}\ln^{-1/4}\left(5^{-6}\ln(x)\right)\frac{1}{x\ln(x)}$.

- $\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)' = \frac{(x)'\sin(x)-x(\sin(x))'}{\sin^2(x)} = \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin^2(x)}$, ahol egyszerűen a két függvény hányadosára vonatkozó deriválási szabályt alkalmaztuk.

- $\left(\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)'$: Összetett függvény, ahol a külső függvény az $f(x) = \arcsin(x)$. Először ennek számítjuk ki a deriváltját. Tudjuk, hogy $\arcsin(\sin(x)) = x$, vagyis $(\arcsin(x))' = \frac{1}{(\sin(x))'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ennek tudatában pedig a belső függvény deriváltja $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$.
  Ahonnan a teljes derivált: $-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

- $\left((\arctan(2x))^x\right)' = \left(e^{x\ln(\arctan(2x))}\right)'$. Összetet függvény, ahol a külső függvény egyszerűen az exponenciális függvény, a belső függvény deriválása ismét a trükkösebb feladat, azon belül is a $(\ln(\arctan(2x)))'$ kifejezés. Itt a külső függvény a logaritmus, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, míg belső függvény a már korábban kiszámított $(\arctan(2x))' = \frac{2}{1+4x^2}$. Vagyis a teljes belső függvény deriváltja $(x\ln(\arctan(2x)))' = \frac{2x}{1+4x^2}\frac{1}{\arctan(2x)} + \ln(\arctan(2x))$. Innen a telejs derivált:

$$\left((\arctan(2x))^x\right)' = (\arctan(2x))^x\left(\frac{2x}{1+4x^2}\frac{1}{\arctan(2x)} + \ln(\arctan(2x))\right).$$

2. Integrálás

2.1. Határozatlan integrál

Úgy gondolhatunk rá, mint a deriválás inverzére:

$$\int \mathrm{d}x\ f(x) = F,$$
$$F'(x) = f(x)\,.$$

A határozatlan integrál egy konstans erejéig bármi lehet, hiszen $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x)$, mivel a konstans függvény deriváltja azonosan nulla!

2.2. Határozott integrál

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(x) = F(x_2) - F(x_1)$$

Ez a *Newton-Leibniz szabály.* Úgy is tekinthetünk rá, mint az $f(x)$ függvény görbéje alatti *előjeles* területre az x_1 és x_2 pontok között.

2.3. Integrálási alapszabályok

Két függvény összegének/különbségének határozatlan integrálja

$\int \mathrm{d}x\ (f(x) \pm g(x)) = \int \mathrm{d}x\, f(x) \pm \int \mathrm{d}x\, g(x)$.

Függvény konstansszorosának határozatlan integrálja

$\int \mathrm{d}x\ c * f(x) = c * \int \mathrm{d}x\, f(x)$.

Parciális integrálás

$\int \mathrm{d}x\ f'(x) g(x) = f(x) g(x) - \int \mathrm{d}x\, f(x) g'(x)$.

Helyettesítéses integrálás

$\int \mathrm{d}x\ f(g(x))\, g'(x) = F(g(x)) + C$.

2.3.1. Határozatlan integrálok

- $\int \mathrm{d}x\ f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b)$, ahol $F'(x) = f(x)$. Ezt abból láthatjuk, hogy ha a jobb oldalon bővítünk az integrálon kívül $\frac{1}{a}$-val, az integrálon belül pedig a-val, akkor éppen a belső függvény, $g(x) = ax+b$ függvény deriváltja, $g'(x) = a$ jelenik meg és alkalmazható a helyettesítéses integrálás szabálya.

- $\int \mathrm{d}x \; g^n(x)\, g'(x) = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C$, mivel a külső függvény $f(x) = x^n$.
- $\int \mathrm{d}x \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln |g(x)| + C$, mivel a külső függvény az $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.4. Alap integrálok

- Hatványfüggvény integrálja: $\int \mathrm{d}x \; x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Mivel a deriválás inverze, könnyen leellenőrizhetjük, hogy $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$ a hatványfüggvény deriválási szabálya alapján. Kivétel, ha $n = -1$, ekkor ugyanis, mivel $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, azt kapjuk, hogy $\int \mathrm{d}x \frac{1}{x} = \ln(|x|) + C$
- $\int \mathrm{d}x \; e^x = e^x + C$
- $\int \mathrm{d}x \; e^{-x} = -e^{-x} + C$.
- Könnyen látható, hogy a hiperbolikus függvények esetén:
  $\int \mathrm{d}x \;\; \sinh(x) = \cosh(x)$, illetve $\int \mathrm{d}x \;\; \cosh(x) = \sinh(x)$,
- $\int \mathrm{d}x \;\; \sin(x) = -\cos(x) + C$, hiszen $(-\cos(x))' = \sin(x)$,
- $\int \mathrm{d}x \;\; \cos(x) = \sin(x) + C$, hiszen $(\sin(x))' = \cos(x)$.

2.5. Két függvény összegének, függvény számszorosának és az első helyettesítéses integrálási speciális esetnek az alkalmazásai

- $\int \mathrm{d}x \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2} = \int \mathrm{d}x \; 1 - 7 \int \mathrm{d}x \frac{1}{x} + 8 \int \mathrm{d}x \frac{1}{x^2} = x - 7\ln(|x|) - 8\frac{1}{x} + C$. Az utolsó tagnál $\frac{1}{x^2}$ integrálját egszerűen csak úgy írtuk fel, hogy $\int \mathrm{d}x \; x^{-2} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$.
- $\int_0^4 \mathrm{d}x \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x}\right]_0^4 = \frac{26}{3}$. Itt ismét egyrészt az $\int \mathrm{d}x \sqrt{x}$ integrált hatvány alakba írtuk át, $\int \mathrm{d}x \; x^{1/2} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}$, másrészt a második integrált is az alábbi hatványalakban írtuk fel: $\int \mathrm{d}x \; x^{-1/2} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$.
- $\int \mathrm{d}x \sqrt{x x^{1/3} x^{1/4}}$: Itt érdemes egy hatványkivetővel felírni az integrandust:
  $\int \mathrm{d}x \; x^{19/24} = \frac{24}{43} x^{43/24} + C$.
- $\int_3^{3+\ln(2)} \mathrm{d}x \frac{1}{e^{3-x}} = \int_3^{3+\ln(2)} \mathrm{d}x e^{x-3} = e^{-3} \int_3^{3+\ln(2)} \mathrm{d}x e^{x} = \left[e^{x-3}\right]_3^{3+\ln(2)} = 1$.
- $\int \mathrm{d}x \; e^{3x} \cosh(5x)$: Itt felhasználjuk a $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ definíciót és mindent exponenciális függvények segítésével írunk fel:
  $\int \mathrm{d}x \frac{e^{3x}e^{5x} + e^{3x-5x}}{2} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \; e^{8x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \; e^{-2x} = \frac{1}{16}e^{8x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$. Az

utolsó lépésben alkalmaztuk az első speciális helyettesítéses integrálási szabályt, ahol $f(ax+b) = e^{4x}$, vagyis $f(x) = e^x$ és $a = 2, b = 0$ és $F(x) = e^x$.

2.6. Parciális integrálás és a további alapintegrálok alkalmazása

- $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{d}x\ (x\sin(2x))$: Tudjuk, hogy a integrandus második tagja kifejezhető a következő deriválttal: $\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' = \sin(2x)$. Ezt beírva az eredeti integrálba:
  $\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' = -\left[\frac{x}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\mathrm{d}x(x)'\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) =$
  $-\left[\frac{x}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{2}\cos(2x)\right) = \dots$
  $\dots = -\left[\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$

  Itt az utolsó integrál elvégzésénél ismét a helyettesítéses itnegrálás első speciális esetét alkalamztuk, ahol $f(ax+b) = \cos(2x)$, vagyis, $f(x) = \cos(x)$, $a = 2, b = 0$, illetve a primitív függvény $F(x) = -\cos(x)$.

- $\int \mathrm{d}x(3x-5)\, e^{2x+5}$: Először alkalmazva a függvény számszorosára vonatkozó szabályt, $\dots = e^5\int \mathrm{d}x(3x-5)\, e^{2x}$. Majd ismét felismreve, hogy a második tag kifejezhető a következő derivált segítségével: $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^{2x}$. Ennek ismeretében használjuk a parciális integrálási szabályt:
  $e^5\int \mathrm{d}x(3x-5)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^5(3x-5)\,\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{e^5}{2}\int \mathrm{d}x(3x-5)'\, e^{2x} = e^5(3x-5)\,\frac{1}{2}e^{2x} - e^5\int \mathrm{d}x 3e^{2x} = \dots$
  $\dots = e^5(3x-5)\,\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3e^5}{4}e^{2x} + C.$

- Kérdés: Vajon mi lehet a logaritmus függvény, $f(x) = \ln(x)$ határozatlan integrálja, ha az exponenciális függvényé, mint láthattuk, olyan egyszerű volt.
  Trükk: $\int \mathrm{d}x\ln(x) = \int \mathrm{d}x(x)'\ln(x)$ és innen már könnyedén alkalmazhatjuk a parciális integrálási szabályt:
  $\int \mathrm{d}x(x)'\ln(x) = x\ln(x) - \int \mathrm{d}x x\frac{1}{x} = x\ln(x) - x + C$. Látható, hogy ellenben az exponenciális függvénnyel, korántsem triviális ez a határozatlan integrál!

- $\int \mathrm{d}x\ln\left(x^2+1\right)$: Itt ismét az előző trükköt alkalmazzuk:
  $\int \mathrm{d}x(x)'\ln\left(x^2+1\right) = x\ln\left(x^2+1\right) - \int \mathrm{d}x x\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' = x\ln\left(x^2+1\right) - \int \mathrm{d}x\frac{2x^2}{x^2+1}$. A fent maradó integrál még igényel egy trükkös átalakítást: $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$, itt második tagról tudjuk, hogy az éppen az $\mathrm{arctg}(x)$ függvény deriváltja! Vagyis az integrál értéke: $2\int \mathrm{d}x\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) = 2x - 2\mathrm{arctg}(x) + C$, vagyis a végeredmény:
  $\int \mathrm{d}x\ln\left(x^2+1\right) = x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\mathrm{arctg}(x) + C.$

- **Emlékeztető**: $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
  $\int_0^1 \mathrm{d}x \arcsin(x)$: Ismét a logaritmusnál tanult trükköt alkalmazzuk: $\int_0^1 \mathrm{d}x (x)' \arcsin(x) = \dots$
  $\dots = [x\arcsin(x)]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = [x\arcsin(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\left(1-x^2\right)'}{\sqrt{1-x^2}} = \left[x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$
  Az utolsó lépésben a helyettesítéses integrálás harmadik speciális szabályát alkalmaztuk, $g(x) = 1 - x^2$, illetve $n = -1/2$, hiszen a megjelenő integrandus $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)'}{\sqrt{1-x^2}}$ deriváltként írható fel.

- $\int \mathrm{d}x \ \tan(x)$: Itt használva a tangens definícióját: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}$, amire már alkalmazhatjuk ismét a helyettesítéses integrálás harmadik speciális esetét, $-\int \mathrm{d}x \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} = -\ln(|\cos(x)|) + C$.

- $\int_e^{e^e} \mathrm{d}x \frac{1}{x\ln(x)}$: Itt ismét fel tudjuk írni az integrandust a helyettesítéses integrálás harmadik speciális esete szerint, hiszen $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, vagyis az integrál a következő alakba írható: $\int_e^{e^e} \mathrm{d}x \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = [\ln(|\ln(x)|)]_e^{e^e} = 1$.

- $\int \mathrm{d}x \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}$: Itt ismét az előző trükköt alkalmazzuk, azaz megpróbáljuk a számlálót olyan alakba írni, hogy az éppen a nevező deriváltjával egyezzen meg:
  $\frac{1}{3}\int \mathrm{d}x \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+5} = \frac{1}{3}\int \mathrm{d}x \frac{\left(e^{3x}+5\right)'}{e^{3x}+5} = \frac{1}{3}\ln\left(\left|e^{3x}+5\right|\right) + C.$

- $\int_0^{\frac{1}{5}} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{1-5x}}$: Hasonlóan járunk el, a nevezőben a gyök alatt lévő kifejezés deriváltja, $(1-5x)' = -5$.
  Illetve ekkor alkalmazva a második helyettesítéses integrálási szabályt, ahol $g(x) = 1 - 5x$, $n = -\frac{1}{2}$, a következő adódik:
  $-\frac{1}{5}\int_0^{\frac{1}{5}} \mathrm{d}x \frac{(1-5x)'}{\sqrt{1-5x}} = -\left[\frac{2}{5}\sqrt{1-5x}\right]_0^{\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}.$

- $\int \mathrm{d}x \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$: Itt a helyettesítéses integrálás második speciális esetét alkalmazzuk, $g(x) = \sin(x)$, $n = -2$ esetén, mivel az integrandus ismét a következő alakba írható:
  $\sin^2(x)(\sin(x))'$, ahonnan az integrál értéke: $\int \mathrm{d}x \sin^2(x)(\sin(x))' = -\frac{1}{\sin(x)} + C$.

- $\int_{-\pi/2}^{0} \mathrm{d}x \cos^3(x)$: Itt érdemes átírni a három koszinuszból kettőt a $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ azonosság alapján, ekkor az integrál a következő alakot ölti:
  $\int_{-\pi/2}^{0} \mathrm{d}x \cos(x) - \cos(x)\sin^2(x) = [\sin(x)]_{-\pi/2}^{0} - \int_{-\pi/2}^{0} \mathrm{d}x (\sin(x))' \sin^2(x),$

ahol a második tagot ismét a helyettesítéses integrálás második speciális esete alapján írtuk át, ahol most $g(x) = \sin(x)$, $n = 2$. Ilyenkor a második tag egyszerűen $\int \mathrm{d}x(\sin(x))' \sin^2(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, vagyis összességében az integrál eredménye:
$\int_{-\pi/2}^{0} \mathrm{d}x \cos^3(x) = \left[\sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{2}{3}$.

- $\int \mathrm{d}x \; \mathrm{arctg}(x)$: Ahogyan már láthattuk többször, az inverz függvények deriválásánál érdemes az integrandust a következő alakban felírni: $\int \mathrm{d}x(x)' \, \mathrm{arctg}(x)$, ahol már ismét alkalmazhatjuk a parciális integrálás módszerét:
$x\mathrm{arctg}(x) - \int \mathrm{d}x \frac{x}{1+x^2}$, itt a második tagban bővítünk 2-vel annak érdekében, hogy a számlálóban megjelenjen a nevező deriváltja, $\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \frac{2x}{1+x^2}$, amit már ki tudunk integrálni a helyettesítéses integrálás 3 speciális esete alapján, $\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\left|1+x^2\right|\right)$, így a teljes integrál:
$$\int \mathrm{d}x \; \mathrm{arctg}(x) = x\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln\left(\left|1+x^2\right|\right) + C.$$

2.7. Helyettesítéses integrálás alkalamzása a speciális esetken túl

- $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \frac{e^{-\tan(x)}}{\cos^2(x)}$: Kihasználjuk, hogy $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, vagyis felírva az integrandust ezszerint:
$-\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x e^{-\tan(x)}(-\tan(x))' = -\left[e^{-\tan(x)}\right]_0^{\pi/2} = 1$, ahol az utolsó lépésben használtuk a helyettesítéses integrálás képletét.

- $\int \mathrm{d}x \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$: Ismét kihasználjuk, hogy tudjuk $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, emiatt bővítve az integrandust $\frac{1}{2}$-el, a következő alakban írhatjuk fel az integrált: $2\int \mathrm{d}x \sinh(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = 2\cosh(\sqrt{x}) + C$, ahol ismét a "szokásos" helyettesítéses integrálási lépést hajtottuk végre, illetve kihasználtuk, hogy tudjuk $\int \mathrm{d}x \sinh(x) = \cosh(x) + C$.

- $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$: Ebben az esetben kicsit bonyolultabb a helyzet, fel kell ismernünk, hogy a következő integrál kiszámítható, $\int \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$. Ennek tudatában látható, hogy az integrandus éppen ez a függvény az e^x belső függvénnyel, melynek azonban a deriváltja is megjelenik a számlálóban:
$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \frac{(e^x)'}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = [\arcsin(e^x)]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2}$, ahol ismét csak a helyettesítéses integrálás alap összefüggését alkalmaztuk.

- $\int_e^{\frac{1}{e}} \mathrm{d}x \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$: Itt ismerjük fel, hogy a logaritmus tulajdonságainak köszönhetően egyszerűbb alakra hozható az integrandus, $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$, ezen felül ez egy $\int \mathrm{d}x f(x) f'(x) = \frac{1}{2}f^2 + C$ "típusú integrál", azaz a helyettesítéses integrálás második speciális esetének felel meg az $f(x) = \ln(x)$ megfeleltetéssel és $n = 1$ esetben, vagyis az integrál végeredménye:

$$\int_e^{\frac{1}{e}} \mathrm{d}x \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} = \left[\frac{1}{4}\ln^2(x)\right]_e^{\frac{1}{e}} = 0.$$

2.8. Helyettesítéses integrálás, második verzió

Többször kényelmesebb, illetve könnyebb a feladatokat megoldani egy új változó bevezetésével:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x f(g(x))\, g'(x)$$

$$g \to y,\ y'\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y,\ f(y(x)) = f(y)$$

$$y_1 = y(x_1)\,,\ y_2 = y(x_2)$$

Tehát mostantól az $y(x) \equiv y$-ra mint új változóra, illetve $f(y(x)) = f(y)$-re mint y függvényére tekintünk.
Példák:

- $\int_0^{\pi^2} \mathrm{d}x \sin(\sqrt{x})$: Itt áttérünk az $y = \sqrt{x}$ új változóra, ekkor az integrálási mértékét a következő képpen tudjuk az új változó szerint felírni, kihasználva, hogy tudjuk, $x = y^2$.

  $$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y.$$

  Innen már könnyen felírhatjuk az eredeti integrált az új $y = \sqrt{x}$ változóval: $2\int_0^{\pi} \mathrm{d}y y \sin(y)$.
  Ezt az integrált már könnyen elvégezhetjük egy parciális integrálással, hiszen $(-\cos(y))' = \sin(y)$:

  $$2\int_0^{\pi} \mathrm{d}y y(-\cos(y))' = -2\left[y\cos(y)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}y \cos(y) = -2\left[y\cos(y)\right]_0^{\pi} + 2\left[\sin(y)\right]_0^{\pi}$$
  $$= 2\left[-\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right) + \sin\left(\sqrt{x}\right)\right]_0^{\pi^2} = 2\pi,$$

  ahol az utolsó lépésben visszaírtuk az eredeti $y = \sqrt{x}$ behelyettesítést!

- $\int \mathrm{d}x \frac{1}{1+\tan(x)}$: Itt érdemes új változónak bevezetni az $y = \tan(x)$-t, ahonnan $x = \mathrm{arctg}(y)$. Ismét felírva az integrált az új változó szerint, és elvégezve az integrálási mérték transzformációját, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = (\mathrm{arctg}(y))' = \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$. Így az integrál a következő alakot ölti: $\int \mathrm{d}y \frac{1}{1+y}\frac{1}{1+y^2}$, amit a parciális törtekre bontás módszerével oldhatunk meg.

Parciális törtekre bontás módszere (a fenti speciális esetben):
Belátható, hogy ekkor a fenti integrandus a következő alakban írható fel:
$$\frac{1}{1+y}\frac{1}{1+y^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{By+C}{1+y^2},$$
ahol az A, B, C konstans értékeket az alapján határozzuk meg, hogy a közös nevezőre hozás után a számlálóban az eredeti érték maradjon, azaz $\frac{1}{1+y}\frac{1}{1+y^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{By+C}{1+y^2}$. A közös nevezőre hozás után a következő számláló adódik, $A+C+(B+C)\,y+(A+B)\,y^2$, aminek azonosnak kell lennie 1-el. Ez a következő 3 ismeretlenes egyenletrendszerre vezet:
$$\begin{aligned} A+C &= 1, \\ B+C &= 0, \\ A+B &= 0, \end{aligned}$$
aminek a megoldása: $A = C = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$. Vagyis azt kaptuk, hogy az integrandus a következőképpen bontható szét két tört összegére: $\frac{1/2}{1+y} - \frac{1}{2}\frac{1+y}{1+y^2}$. Ezt már könnyedén tudjuk integrálni, hiszen az első tag integrálja egyszerűen $\frac{1}{2}\ln(|1+y|)$, míg a másodiké:
$-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \frac{1-y}{1+y^2} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x \frac{\left(1+y^2\right)'}{1+y^2} = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(y) + \frac{1}{4}\ln\left(1+y^2\right)$.
Így összességében az integrál értéke:
$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{1+\tan(x)} = \frac{1}{2}\ln(|1+\tan(x)|) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln\left(1+\tan^2(x)\right) + C,$$
ahol az utolsó lépésben visszaírtuk az eredeti $y = \tan(x)$ behelyettesítést.

- $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \frac{e^x}{e^{2x}+1}$: Itt először bevezetjük az $y = e^x$ új változót, ahonnan az integrálási mérték a következő képpen fog módosulni: $x = \ln(x)$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Továbbá az integrálási határok is módosulnak, $y_1 = e^{x_1} = e^{-\infty} = 0$, $y_2 = e^{x_2} = e^0 = 1$. Vagyis az eredeti integrál az új változóval felírva következőképpen fog kinézni:
$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\frac{y}{1+y^2} = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{1}{1+y^2} = [\mathrm{arctg}(y)]_0^1 = [\mathrm{arctg}(e^x)]_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{4}$, ahol ismét visszahelyettesítettünk az $y = e^x$ változócsere alapján.
Vegyük észre, hog ezt a feladatot könnyedén meg tudtuk volna oldani a "hagyományos" módon is, ugyanis az integrandusra tekinthetünk úgy mint egy $f(g(x))\,g'(x)$ alakú kifejezésre, ahol $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = e^x$. Vagyis rögtön látszik, hogy $\int \mathrm{d}x \frac{(e^x)'}{1+(e^x)^2} = \mathrm{arctg}(e^x) + C$, ami éppen megegyezik az korábbi úton kapott eredményünkkel!

- $\int \mathrm{d}x \frac{1}{\sin(x)}$, itt ismét érdemes bevezetni új változónak az $y = \cos(x)$, illetve $x = \arccos(y)$, ahonnan a integrálási mérték az új változó szerint $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$, illetve $\sin(x) = \sqrt{1-y^2}$, ahonnan az integrál:

$-\int \mathrm{d}y \frac{1}{1-y^2} = \mathrm{artanh}(y) + C = -\mathrm{artanh}(\cos(\mathrm{x})) + C$.
Ismét megoldhatjuk egy másik úton ezt a példát: szorozzuk be mind a nevezőt, mind a számlálót $\sin(x)$-al, amiből adódik a következő integrál: $\int \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}$, most vegyük észre, hogy az integrandus ismét $f(g(x))\, g'(x)$ alakú, ahol $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, illetve $g(x) = \cos(x)$. Vagyis az integrál a következő alakban írható, amire alkalmazható a "hagyományos" helyettesítéses integrál:
$-\int \mathrm{d}x \frac{(\cos(x))'}{1-(\cos(x))^2} = -\mathrm{artanh}(\cos(x)) + C$, ami éppen megegyezik az előző részfeladatban kapott eredményünkkel!

"Fenman's trick"

Legyen az elvégzendő integrál a következő

2.1. Example.

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}. \tag{2.1}$$

Hogy ezt megoldjuk alkalmazhatunk egy $y = x + 1$ változócserét és egy pár parciális integrálást. Most ehelyett veszünk egy integrálfüggvényt a következő alakban[3]

$$I(\gamma) = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(\gamma x+1)}{1+x^2}. \tag{2.2}$$

, ahol most $\gamma \geq 0$. Látjuk hogy $I(\gamma = 1)$ esetben visszakapjuk az eredeti integrált amivel el akartunk bánni.

Differenciáljuk most $I(\gamma)$ függvényt γ szerint

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(\gamma x+1)}{1+x^2} \tag{2.3}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\frac{\partial \ln(\gamma x+1)}{\partial \gamma}}{1+x^2} \tag{2.4}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{1+x^2} \frac{x}{\gamma x+1} \tag{2.5}$$

Ezen a ponton az ilyen alakú integráloknál megszokott módon parciális törtekre bontjuk az integrandust.

$$\frac{1}{1+x^2} \frac{x}{\gamma x+1} = \frac{x}{(\gamma x+1)(x^2+1)} \tag{2.6}$$

$$= \frac{\gamma + x}{(\gamma^2+1)(x^2+1)} - \frac{\gamma}{(\gamma^2+1)(\gamma x+1)} \tag{2.7}$$

[3]Választhattuk volna $I(\gamma)$-t olyan integrandussal is mely a tradicionálisabb $x \to \gamma x$ változócserének megfelelő $f(x) = \frac{\gamma x+1}{1+\gamma^2 x^2}$ integrandust adja, csupán a későbbiekben ez megnehezítené a dolgunkat.

Láthatjuk, hogy mindkét törtben megjelenik egy az x-re történő integrál tekintetében konstans tag $\frac{1}{\gamma^2+1}$, amit kiemelhetünk az integrál elé

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial\gamma} = \frac{1}{\gamma^2+1}\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{-\gamma}{\gamma x+1} + \frac{\gamma}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\right) \tag{2.8}$$

Az így kapott integrált könnyedén elvégezhetjük

$$\begin{aligned}\frac{\partial I(\gamma)}{\partial\gamma} &= \frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma x+1|) + \frac{1}{2}\ln\big(x^2+1\big) + \gamma\arctan(x)\right]_0^1 && (2.9)\\ &= \frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma+1|) + \frac{1}{2}\ln(2) + \gamma\frac{\pi}{4}\right] && (2.10)\end{aligned}$$

Ez azonban $I(\gamma)$ deriváltjának eredménye, hogy megkapjuk a korábbi γ függő integrált, az előbbi kifejezést ki kell integrálnunk:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\partial I(\gamma)}{\partial\gamma} &= I(1) - I(0) && (2.11)\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma+1|) + \frac{1}{2}\ln(2) + \gamma\frac{\pi}{4}\right] && (2.12)\\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\ln(|\gamma+1|)}{\gamma^2+1} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} && (2.13)\\ &= -I(1) + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} && (2.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2I(1) &= \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} && (2.15)\\ &= \frac{\ln(2)}{2}\arctan(x)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{4}\ln\big(\gamma^2+1\big)\frac{1}{2}\Big|_0^1 && (2.16)\\ &= 2\frac{\ln(2)}{2}\frac{\pi}{4} && (2.17)\end{aligned}$$

Innen pedig a megoldás már egyértelmű, hiszen

$$I \equiv I(1) = \frac{\ln(2)\pi}{8} \tag{2.18}$$

Összefoglalva az integrálási technika lépéseit:

1. Vezessünk be egy paraméteres integrálfüggvényt, amely az eredeti integrálást, az új változó szerinti differenciálás egyszerűbbé teszi

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x f(x) \rightarrow I(\gamma) = \int_a^b \mathrm{d}x\tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.19}$$

2. Deriváljuk le az új integrálfüggvényünket az új paraméter szerint

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \int_a^b \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.20}$$

3. Végezzük el x-re az integrált, majd integráljuk ki mindkét oldalt az új változó szerint

$$\int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = I(1) - I(0) = \int_0^1 \int_a^b \mathrm{d}\gamma\, \mathrm{d}x\, \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.21}$$

4. Rendezzük $I(1)$-re az így kapott kifejezést.

2.2. Example (Egy triviális példa[4]: $f(x) = x^3 - x$)**.**

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x x^3 - x \tag{2.22}$$

$$I(\gamma) = \int_a^b \mathrm{d}x\, \gamma^3 x^3 - \gamma x \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \int_a^b \mathrm{d}x\, 3\gamma^2 x^3 - x \tag{2.24}$$

$$= 3\gamma^2 \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b \tag{2.25}$$

$$= 3\gamma^2 \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.26}$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = I(1) - I(0) = \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\, 3\gamma^2 \frac{b^4 - a^4}{4} - \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\, \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.27}$$

$$= \frac{3\gamma^3}{3}\bigg|_0^1 \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2}\gamma\bigg|_0^1 \tag{2.28}$$

$$I(1) = I = \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.29}$$

[4] Itt láthatjuk, hogy ha a függvényt $f(x) = x^3 - x + const.$ alakban adnánk meg, hogy a módszer rossz eredményre vezet, de ebben az esetben a konstans integrálását kezelhetjük külön integrálként.

3. Komplex számok

3.1. Bevezetés

Komplex egység:

$$i^2 = -1 \tag{3.1}$$

Komplex számok általánosan:

$z \in \mathbb{C}$, $z = a + b * i$, $a, b \in \mathbb{R}$
$Re\{z\} = a$, $Im\{z\} = b$, valós rész és képzetes rész,
$\overline{z} = a - b * i$, komplex konjugálás,
$z + \overline{z} = 2Re\{z\}$, $z - \overline{z} = 2Im\{z\}\, i$,
$r = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, komplex szám abszolút értéke, hossza,
$|z_1 z_2| = \left| r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$.

Komplex számok geometriai ábrázolása:

A komplex számokat ábrázolhatjuk 2 dimenziós Descartes-koordináta rendszerben, ahol a vízszintes tengelyen a valós rész, míg a függőleges tengelyen a képzetes rész nagyságát tüntetjük fel. Így bevezethetjük a komplex számokat jellemző *polárkoordinátákat*, ahol az origótól való távolság

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

illetve a vízszintes tengellyel bezárt szög (szokás nevezni fázisnak is)

$$\varphi = \frac{|b|}{b} \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Ekkor a komplex szám kifejezhető trigonometrikus alakban, mint

$$z = r\,(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \tag{3.2}$$

melynek Euler-féle alakja:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \to z = re^{i\varphi}. \tag{3.3}$$

Innen következik, hogy

$$|z_1\, z_2| = \left| r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right| = r_1\, r_2 = |z_1||z_2|. \tag{3.4}$$

Szokás az itt megjelenő exponenciáis tagot is fázisnak nevezni.

3.1.1. Műveletek komplex számokkal

Legyen $z_1 = a + bi$, illetve $z_2 = c + di$. Ekkor a két komplex szám összegét a következőképp írhatjuk:

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d) \cdot i. \tag{3.5}$$

Tehát valós részt a valós résszel, képzetes részt a képzetes résszel adunk össze. Ugyanezen két szám szorzatára pedig a következő lesz igaz

$$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i \tag{3.6}$$

illetve Euler-alak esetén

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{3.7}$$

3.2. Feladatok

3.2.1. Összeadás és kivonás

$$(2+5i)+(4-3i)=(2+4)+(5-3)\,i = 6+2i \tag{3.8}$$
$$(3-4i)+(-5+2i)=(3-5)+(-4+2)\,i = -2-2i \tag{3.9}$$
$$\left(1+\sqrt{3i}\right)-\left(\sqrt{2}-4i\right)=\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}+4\right)i \tag{3.10}$$
$$(1-i)-(4-i)=(1-4)+(-1+1)\,i = -3 \tag{3.11}$$
$$\tag{3.12}$$

3.2.2. Szorzatok és hányadosok

$$(3-5i)(-4+i) = -7+23i \tag{3.13}$$
$$(3-4i)(3+4i) = 25 \tag{3.14}$$

Érdekes összefüggés: $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (a középsikolából ismert összefüggés, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, analógiájára).

$$\frac{3-4i}{3+4i} = \frac{(3-4i)^2}{25} = \frac{7}{25} - \frac{24}{25}i \tag{3.15}$$

Itt bővítettünk a nevező komplex konjugáltjával, hogy a nevező tisztán valós legyen.

3.2.3. Algebrai és trigonometriai alak

Határozzuk meg az algebrai, illetve a trigonometrikus alakját az alábbi komplex számoknak:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - i \\ \text{Hossz: } r &= \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \\ \text{Szög: } \varphi &= -\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx -0.3217 \\ \text{Euler-alak: } z_1 &= \sqrt{1}0e^{-0.3217i} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -2 - 3i \\ \text{Hossz: } r &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \\ \text{Szög: } \varphi &= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \approx 0.588 \\ \text{Euler-alak: } z_1 &= \sqrt{1}0e^{-0.3217i} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Határozzuk meg most a $\frac{z_2}{z_1}$ algebrai és trigonometrikus alakját. Az algebrai alakhoz, szorozzuk meg a nevezőt annak konjugáltjával, így a következőt kapjuk:

$$\frac{z_2 z_1}{|z_1|^2} = \frac{-9 - 7i}{10} = -\frac{9}{10} - \frac{7}{10}i \tag{3.18}$$

Az Euler-alakhoz szükségünk van a komplex számok abszolút értékére és a szögre:

$$r = \left|\frac{z_2}{\overline{z_1}}\right| = \frac{|z_2|}{|\overline{z_1}|} = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \sqrt{\frac{13}{10}},\ \varphi = -\arccos\left(-\frac{9}{\sqrt{130}}\right) = -2.48$$

Euler-alak:

$$\frac{z_2}{\overline{z_1}} = \sqrt{\frac{13}{10}}e^{-2.48i} \tag{3.19}$$

3.2.4. Algebrai alak

$\frac{1}{(3+4i)^2}$: Először kibontjuk a zárójelet a nevezőben, majd bővítünk a nevező komplex konjugáltjával:

$$\frac{1}{(1+4i)^2} = \frac{1}{-15+8i} = \frac{-15-8i}{289} = -\frac{15}{289} - \frac{8}{289}i \tag{3.20}$$

$\frac{2+i}{i(-3+4i)}$: Hasonlóan járunk el, először bővítünk a nevező komplex konjugáltjával:

$$\frac{2+i}{i(-3+4i)} = \frac{2+i}{-4-3i} = \frac{(2+i)(-4-3i)}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{10}{25}i \tag{3.21}$$

$\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)\left(\sqrt{3}-i\right)}$: Ahelyett, hogy először felbontjuk a nevezőben lévő zárójelt, rögtön bővítünk a nevező konjugáltjával:

$$\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)\left(\sqrt{3}-i\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2(1+i)}{20} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i \tag{3.22}$$

3.2.5. Trigonometrikus alak

$-\sqrt{3}-i$: először a hosszát adjuk meg: $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$, majd szöget: $\varphi = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\pi}{6}$. Innen a trigonometrikus alak:

$$-\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \tag{3.23}$$

$-\sqrt{6}i$: Egyszerű, hiszen nincs valós rész, tehát a hossza egyszerűen $r = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + 0^2} = 6$, illetve a szög, mivel a szám a képzetes tengely negatív tartományában és a tengelyen rajta van, egyszerűen $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ A trigonometrikus alak is triviális:

$$-\sqrt{6}i = -\sqrt{6}i\sin(\pi/2) \tag{3.24}$$

-7: Hasonlóan triviális, csak most a képzetes rész zérus, tehát az abszolút érték egyszerűen $r = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$, illetve a szög, mivel a komplex szám a valós tengely negatív felén, a tengelyen helyezkedik el, $\varphi = \pi$. Innen a trigonometrikus alak:

$$-7 = 7\cos(\pi) \tag{3.25}$$

3.2.6. Abszolút érték számítás

$\left|\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}\right|$: Alkalmazzuk, hogy komplex számok szorzatának abszolut értéke az abszolut értékek szorzata, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Esetünkben tehát az eredmény $|3+4i||2+i|\left|\frac{1}{1+2i}\right|\left|\frac{1}{4+3i}\right|$, ahol alkalmazhatjuk a következő azonosságot $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right| = \frac{|\overline{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$. Vagyis az eredmény nem más mint tört kiszámítása úgy, hogy a benne szereplő komplex számokat az abszolut értékeikkel helyettesítjük:

$$\left|\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}\right| = \frac{5\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = 1 \tag{3.26}$$

$z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$: $\left|\frac{2z_2+z_1-5+i}{2z_1-z_2+3-i}\right|$: Használjuk a tudásunkat az előző esetről, vagyis hogy $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, ami alapján a kérdéses érték

$$\frac{|3-2i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{13}}{5} \tag{3.27}$$

3.2.7. Gyökvonás és hatványozás

$\sqrt[6]{1}$: A komplex számok körében minden $z \in \mathbb{C}$ komplex számnak n darab n-edik egységgyöke van. Ezt szemlélteti ez a példa is, hiszen, ha Euler alakba írjuk fel, $1 = e^{2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$, ahol kihasználtuk a komplex számok fázis szerinti 2π periodicitását, akkor látható, hogy a kérdéses érték $\sqrt[6]{1} \equiv e^{\frac{k}{6}2\pi i}$, ami $k \in \mathbb{Z}$ esetén 6 különböző értéket vesz fel, rendre

$$\begin{aligned}
&k=0,\ \sqrt[6]{1} = 1\\
&k=1,\ \sqrt[6]{1} = e^{\frac{1}{6}2\pi i}\\
&k=2,\ \sqrt[6]{1} = e^{\frac{2}{6}2\pi i}\\
&k=3,\ \sqrt[6]{1} = e^{\frac{3}{6}2\pi i}\\
&k=4,\ \sqrt[6]{1} = e^{\frac{4}{6}2\pi i}\\
&k=5,\ \sqrt[6]{1} = e^{\frac{5}{6}2\pi i}
\end{aligned}$$

$\sqrt{i}$: Hasonlóan érdemes a triviális Euler-alakot felírni, figyelembe véve a 2π periodicitást, $i = e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}$. Majd véve a másdoik gyököt, két különböző eredmény adódik:

$$\begin{aligned}
&k=0,\ \sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &&= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\\
&k=1,\ \sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i+\pi i} &&= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$\sqrt[4]{-4}$: Hasonlóan járunk el, azzal a különbséggel, hogy most a gyök alatt szám nem a komplex egységkörön helyezkedik el, ezért először Euler alakba írjuk, amiben megjelenik az 1-től különböző abszolut értéke is, $-4 = 4e^{\pi i+2k\pi i}, k \in \mathbb{Z}$, ahol ismét kihasználtuk, hogy minden komplex szám a fázisában 2π szerint periódikus. Az abszolut érték gyökének kiszámításakor csak a valós esetben megszokott értéket adjuk meg. Innen a megfelelő 4 gyök a következők:

$$
\begin{aligned}
&k=0,\ \sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4}e^{\pi/4i}=\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))=1+i\\
&k=1,\ \sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4}e^{3\pi/4i}=(-1+i)\\
&k=2,\ \sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4}e^{5\pi/4i}=(-1-i)\\
&k=3,\ \sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4}e^{7\pi/4i}=(1-i)
\end{aligned}
$$

$\sqrt[3]{i}$: Hasonlóan felírva Euler alakban és kihasználva a fázis 2π szerinti periodicitását, $i=e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}, k\in\mathbb{Z}$, a következő 3 gyök adódik:

$$
\begin{aligned}
&k=0,\ \sqrt[3]{i}=e^{\frac{\pi}{6}i}=\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big)+i\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\\
&k=1,\ \sqrt[3]{i}=e^{\frac{5\pi}{6}i}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\\
&k=2,\ \sqrt[3]{i}=e^{\frac{9\pi}{6}i}=-i
\end{aligned}
$$

$\sqrt[3]{2-2i}$: Ismét felírjuk Euler- alakba, figyelembe véve a 2π periodicitást, $2-2i=\sqrt{8}e^{-\frac{\pi}{4}i+2k\pi i}, k\in\mathbb{Z}$, illetve a abszolutértéknél egyszerűen véve a valós és pozitív köbgyököt, a következőt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
&k=0,\ \sqrt[3]{2-2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}e^{-\frac{\pi}{12}i}}=\sqrt{2}\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{12}\Big)-i\sin\Big(\frac{\pi}{12}\Big)\Big)\approx\sqrt{2}(0.966-0.26i)\\
&k=1,\ \sqrt[3]{2-2i}=\sqrt{2}e^{\frac{7}{12}\pi i}\approx\sqrt{2}(-0.26+0.966i)\\
&k=2,\ \sqrt[3]{2-2i}=\sqrt{2}e^{\frac{15}{12}\pi i}=(-1-i)
\end{aligned}
$$

$\sqrt[5]{2+3i}$: Hasonló eljárásmód: Euler-alak, kiírva expliciten a 2π periodicitást egy tetszőleges $k\in\mathbb{Z}$ egész szám segítségével, $\sqrt[5]{2+3i}\approx\sqrt{13}e^{0.983i+2k\pi i}$, gyökvonás az abszolút értékből és véve annak a valós pozitív gyökét:

$$
\begin{aligned}
&k=0,\ \sqrt[5]{2+3i}\approx 0.997e^{0.197i}=0.997(\cos(0.197)+i\sin(0.197))=0.977+0.195i\\
&k=1,\ \sqrt[5]{2+3i}\approx 0.997e^{0.197i+\frac{2\pi}{5}i}=-0.618+0.782i\\
&k=2,\ \sqrt[5]{2+3i}\approx 0.997e^{0.197i+\frac{4\pi}{5}i}=-0.935-0.346i\\
&k=3,\ \sqrt[5]{2+3i}\approx 0.997e^{0.197i+\frac{6\pi}{5}i}=0.04-0.996i\\
&k=4,\ \sqrt[5]{2+3i}\approx 0.997e^{0.197i+\frac{8\pi}{5}i}=0.96-0.27i
\end{aligned}
$$

$(1+i)^4$: Hatványozás, itt is érdemes előbb az Euler-alakot felírni, azonban most nem szükséges figyelembe vennünk a $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ periodicitást, hiszen a hatványozás után (ha egész szám a hatvány kitevő) ez a periodicitás nem változik, $\left(e^{2k\pi i}\right)^n = e^{2kn\pi i} = 1$. Vagyis esetünkben $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, ahonnan

$$arg u 1 + i^4 = 4e^{\pi i} = -4$$

$\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)^8$: Ismét ez Euler-alakkal érdemes kezdeni, ehhez előbb azonban algebrai alakra kell hoznunk a komplex számot: $\left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8 = e^{\frac{\pi}{4}i}$.
Most már könnyen felírhatjuk az Euler-alakot:

$$\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^8 = e^{2\pi i} = 1$$

$(1+2i)$ 5–$(1-2i)^5$: Mindent Euler alakba írunk és külön-külön végezzük el a hatványozást, ez azért érdemes megtenni, mert látható, hogy ugyanannabból a komplex számból vonjuk ki a saját komplex konjugáltját, $z - \overline{z} = 2Im\{z\}\,i$ és $(\overline{z})^5 = \overline{z^5}$. Vagyis kiszámítva a $(1+2i)^5 \approx 5^{\frac{5}{2}}\left(e^{1.107i}\right)^5 = 41 - 38i$. Igazából a valós rész nem is érdekes, hiszen az úgy is kiesik, miután kivonjuk belőle a komplex konjugáltat is!
A végeredményhez tehát elég ismerni az egyik tag képzetes részét és így a végeredmény:

$$(1+2i)^5 - (1-2i)^5 = 2Im\left\{(1+2i)^5\right\} i = -76i$$

$\frac{(1+i)^6+(1-i)^6}{(1+i)^6(1-i)^6}$: Itt először kihasználjuk, hogy nevezőben éppen egy komplex szám és annak komplex konjugáltjának szorzata szerepel, $z\overline{z} = |z|^2$, továbbá a számlálóban egy komplex szám és annak komplex konjugáltjának összege szerepel. Vagyis az eredeti kifejezés a következő egyszerű alakot ölti:

$$\frac{(1+i)^6 + (1-i)^6}{(1+i)^6(1-i)^6} = \frac{2Re\left\{(1+i)^6\right\}}{2^6}, \tag{3.28}$$

azaz nincs más feladatunk, mint meghatározni az $(1+i)^6$ komplex szám valós részét, ehhez írjuk fel Euler-alakba, $(1+i) = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6 = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$, innen a valós rész, $Re\left\{(1+i)^6\right\} = 8\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, ahonnan a végeredmény is triviálisan nulla!

3.2.8. Egyenletek komplex számokkal

Komplex számokra felírt egyenletek esetén mindig *kettő egyenletet* kell megoldanunk, egyet a valós és egyet a képzetes részre. Más szavakkal az egyenlet két oldalán mind a valós, mind a képzetes résznek meg kell egyeznie, úgy is mondhatjuk, hogy egy komplex szám képzetes részét nem tudjuk kifejezni egy másik komplex szám valós részével, a képzetes és valós tagok *algebrailag függetlenek*!

$3x + 2yi - ix + 5y = 7 + 5i$: Ahogyan fent kifejtettük, az egyetlen két oldalán mind a képzetes, mind valós részeknek meg kell egyezniük! Ez a következő két ismeretlenes egyenletrendszerre vezet:

$$3x + 5y = 7, \tag{3.29}$$
$$2y - x = 5. \tag{3.30}$$

$3 \times (2) + (1) = 11y = 22 \to y = 2$, ahonnan $(2) : x = -1$.

$z^2 - (3 + 4i)\, z + 1 + 5i = 0$: Itt egyszerűen alkalmazhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét, hiszen a komplex számok körében is két megoldást fogunk kapni, csupán annyi különbséggel, hogy most nem kell kizárnunk azokat az eseteket (ellenben középiskolás tanulmányainkkal), amikor negatív a diszkrimináns, vagyis alkalamzva a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$z_{1,2} = 1.5 + 2i \pm \sqrt{(1.5 + 2i)^2 - 1 - 5i} = 1.5 + 2i \pm \sqrt{-2.75 + i},$$

ahol csak meg kell határoznunk a fenti diszkrimináns négyzetgyökét: $\sqrt{-2,75 + i} \approx \sqrt[4]{2.75^2 + 1}e^{2.793i} \approx -1.6 + 0.585i$, vagyis végeredmény: $z_1 = -0.12.585i$, $z_2 = -3.1 + 1.415i$.

$2z^2 = -|z|^2 + i$: Ilyenkor érdemes az algebrai alakban keresni a kérdéses komplex számot, azaz $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, vagyis a fenti egyenlet ekkor: $2(x + iy)^2 = -x^2 - y^2 + i \to 2x^2 - 2y^2 + 4xyi = -x^2 - y^2 + i \to -3x^2 + y^2 - 4xyi + i = 0$:
Mivel mind a valós, illetve mind a képzetes részeknek meg kell egyezniük, a következő két ismeretlenes egyenletrendszer adódik:

$$y^2 - 3x^2 = 0, \tag{3.31}$$
$$4xy = 1. \tag{3.32}$$

Az első egyenletből, (3), $y = \pm\sqrt{3}x$, ahonnan a második egyenlet alapján $\pm 4\sqrt{3}x^2 = 1 \to x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4\sqrt{3}}}$. Mivel $x, y, \in \mathbb{R} \to y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

$\frac{1}{2}|z| - z = 1 - i$: Itt érdemes mindent az abszolut értékes kifejezésre rendezni és négyzetre emelni az egyenlet mindkét oldalát, $\frac{1}{4}|z|^2 = (z + 1 - i)^2$. Ezt a kifejezést kifejtve, amikor $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, vagyis ekkor az $x + 1 + (y - 1)\, i$ kifejezést emeljük négyzetre, a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right) = (x + 1)^2 - (y - 1)^2 + 2(x + 1)(y - 1)\, i. \tag{3.33}$$

Az egyenletnek csak az egyik oldalán látható képzetes tag, aminek az együtthatójának így nullát kell adnia, vagyis $x = -1$ vagy $y = 1$:
$x = -1$: Így a valós részekre a kapott egyenelőség alapján: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}y^2 = -(y-1)^2$, ami semmilyen valós $y \in \mathbb{R}$ esetén nem lehetésges.
$y = 1$: A valós részekre kapott egyenlőség alapján: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2 = (x+1)^2 \to \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 2x + 1 \to \frac{3}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{4} = 0 \to x_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = -\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.
Vagyis a teljes megoldás: $x_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$, $y = 1$.

$z^2 + z = 1 - \overline{z}$: Ismét érdemes a $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ algebrai alakban keresni a megoldást.
Ekkor $z^2 + z = x^2 + x - y^2 + 2xyi + yi = 1 - x + yi$, ami a alábbi 0-ra rendezett egyenletre vezet:
$x^2 + 2x - 1 - y^2 + 2xyi = 0$. Ismét, mivel csak a $2xyi$ az egyetlen képzetes tag, $xy = 0$, ami két lehetséges megoldásra vezet, $x = 0$ vagy $y = 0$:
$x = 0$: Ekkor egyszerűen marad az $y^2 = -1 \to y_{1,2} = \pm i$, $x = 0$ a megoldás.
$y = 0$: Ekkor a maradék megoldandó egyenlet az $x^2 + 2x - 1 = 0 \to x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$, $y = 0$ a megoldás.

Egy trükkösebb feladat: $Im\{z + \frac{1}{z}\} = 0$ $Im\{z\} \neq 0$, $|z| = ?$
Érdemes ismét $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ módon paraméterezni az ismeretlen komplex számot és így $z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x+yi} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + \left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)i$, illetve a feltételünk miatt $y \neq 0 \leftrightarrow Im\{z\} \neq 0$, továbbá azt tudjuk, hogy $y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = y\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\right) = 0 \leftrightarrow Im\{z + \frac{1}{z}\} = 0$, ami a korábbi $y \neq 0$ feltétel miatt az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ összefüggésre vezet, ahonnan $|z|^2 = 1 \to |z| = 1$.

3.2.9. Egyenletrendszerek komplex számokkal

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$iz_1 - iz_2 + 2 = 0, \tag{3.34}$$
$$2z_1 + z_2 = i. \tag{3.35}$$

Hasonlóan járunk el, mint a "megszokott" valós egyenletrendszereknél, az egyenlő együtthatók módszerével elimináljuk a z_2 változót, a következő lineáris kombinációval: $(34) + i \times (35)$: $3iz_1 = -3$, ahonnan $z_1 = i$, visszahelyettesítve például a (35)-ös egyenletbe, a következőt kapjuk:
$2i + z_2 = i \to z_2 = -i$.

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$iz_1 + 2z_2 = 1 - 2i, \tag{3.36}$$
$$4z_1 - iz_2 = 3i - 1. \tag{3.37}$$

Most oldjuk meg úgy, hogy a (37)-es egyenletből kifejezzük z_2-t:
$z_2 = -3 - i - 4iz_1$, majd visszahelyettesítünk a (36)-os egyenletbe:

$-6-2i-7iz_1 = 1-2i \rightarrow z_1 = i$,
illetve $z_2 = -3-i+4 = 1-i$.

3.2.10. Komplex logaritmus, illetve komplex hatványkitevő

3.2.11. Komplex számok logaritmusa:

Érdemes itt ismét az Euler-alakot vizsgálni, $z = |z|e^{i\varphi+2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$, ahol ismét expliciten kiírtuk a fázis 2π periodicitását. Most vegyük a logaritmust, $\ln(z) = \ln\big(|z|e^{i\varphi+2k\pi i}\big) = \ln(|z|) + i\varphi + 2k\pi i$, vagyis a komplex számok körében *a logaritmus nem egyértelmű*, 2π periodicitást mutat. Emiatt a konvenció a következő $\ln(z) = \ln(|z|) + i\varphi$ $+i\mathrm{mod}2\pi$, vagyis a $k = 0$-hoz tartozó logaritmus írjuk ki, de feltüntetjük, hogy a kapott mennyiség 2π periodikus!

- $\ln(\sqrt[3]{e})$: A szokásos módon a hatványkitevőt kihozzuk a logaritmus elé, majd a fentebb leírtak alapján kiszámítjuk a logaritmust a komplex számok körében, ahol most $e = ee^{2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
  A logaritmus ezekután egyszerűen $\ln(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3} + 2k\pi i$, avagy a konvencióval $\ln(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3} + i\mathrm{mod}2\pi$.
- $\ln\big(\sqrt{3}-i\big)$: Mint korábban is, legcélravezetőbb átírni a logaritmus argumentumát Euler-alakba, $\sqrt{3}-i = \sqrt{\big(\sqrt{3}\big)^2 + (-1)^2}e^{-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$. Innen a komplex logaritmus egyszerűen $\ln(z) = \ln(|z|) + i\varphi + \mathrm{mod}2\pi i = 2 + \frac{\pi}{6}i + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\ln\big(\sqrt{i}e^{i\pi}\big)$: Komplex számok szorzatának logaritmusa uganúgy a logaritmusok összege, mint a "megszokott" valós esetben, vagyis $\ln\big(\sqrt{i}e^{i\pi}\big) = \frac{1}{2}\ln(i) + \ln\big(e^{i\pi}\big)$.
  Az első tagot Euler alakba írva, $\ln\Big(e^{\frac{\pi}{2}i}\Big) = \frac{\pi}{2}i + \mathrm{mod}2\pi$, a végeredmény egyszerűen adódik:
  $\ln\big(\sqrt{i}e^{i\pi}\big) = \frac{5\pi}{4}i + \mathrm{mod}2\pi$.

3.2.12. Komplex hatványkitevő:

Ugyanúgy működik, mint valós esetben, de hogy szabályszerűen el tudjuk végezni, mindig érdemes az Euler-alakból kiindulni. Ha egy $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ komplex számot valós hatványra emelünk, a "szokásos módon" kell eljárni, ahogyan tettük a gyökvonás és egyész számmal való hatványozás során. Újdonság azonban, ha a hatványkitevő képzetes, vagyis a $z^{bi} = \big(re^{i\varphi}\big)^{bi}$ eset, ekkor a valós hatványozás szabályait követve a tagokat külön-külön hatványozzuk, $z^{bi} = r^{bi}e^{i\varphi bi} = r^{bi}e^{-b\varphi}$. Kérdés, hogy miként értelmezhetjük az r^{bi} tagot. Ha exponenciális alakba írjuk az abszolut értéket, $r = e^{\ln(r)}$, akkor a hatványozás elvégzése után éppen az Euler-alakra jutunk, $r^{bi} = e^{\ln(r)bi} = \cos(\ln(r)\,b) + i\sin(\ln(r)\,b)$.

3.2.13. extra feladatok:

- e^z : ahol $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Egyszerű a helyzet ugyanis $e^{x+yi} = e^x(\cos(x) + \sin(y))$. Vagyis $|e^z| = e^{Re\{z\}}$, illetve $\varphi = Im\{z\}$.

- $\sin(z)$, ahol $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$: Írjuk ki a szinusz függvény exponenciális definícióját, $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, ahonnan már könnyű dolgunk van, hiszen $iz = ix - y$, visszaírva ezt a szinusz kifejezésébe, $\sin(z) = \frac{e^{-y+xi} - e^{y-xi}}{2i}$. Érdekes megnézni, hogy ugyanezt kapnánk, ha vennénk az $-i\sinh(iz)$ kifejezést, hiszen ez nem más mint, definíció alapján, $\frac{e^{-y+xi} - e^{y-xi}}{2i} \equiv \sin(z)$.

- i^i: Egyszerűen csak fel kell írnunk a képzetes egységet Euler-alakba, $i^i = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

- $(3)^{3i}$: A fentebb elmondottak alapján, érdemes egy epxonenciális kifejezésként felírni, $(3)^{3i} = \left(e^{\ln(3)}\right)^{3i} = e^{3i\ln(3)} = \cos(3\ln(3)) + i\sin(3\ln(3))$.

- $\left(\frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{1+i}$: Ismét érdemes rögtön az Euler alakot felírni majd elvégezni a ”valós szám képzetes hatványon” és ”komplex fázis képzetes hatványon típusú” hatványozásokat:
  $\left(\frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{i+1} = \left(ee^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{i+1} = e^{1+i}e^{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}i}$. Az utolsó feladatunk, hogy szeparáljuk a megfelelő tagokat és megkapjuk a végleges Euler-alakot:
  $e^{1-\frac{\pi}{4}}e^{\left(1+\frac{\pi}{4}\right)i} = e^{1-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right)$, ahol az utolsó lépésben expliciten kiírtuk a trigonometrikus alakot.

4. Vektortér, Vektor algebra

4.1. Definíció:

V vektortér a $\mathbb{K} \equiv \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ számtest felett: $\underline{u}$, $\underline{v} \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$:

- $a\,\underline{v} + b\,\underline{u} \in V$ - Linearitás.
- $(a+b)(\,\underline{a} + \,\underline{b}) = a\,\underline{v} + b\,\underline{u} + a\,\underline{u} + b\,\underline{u} \in V$ - Disztributivitás mindkét irányban.
- $\exists!\,\underline{0} \in V$: $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$, $\forall\,\underline{v} \in V$ - A vektortér nulleleme.
- $\exists -\,\underline{v} \in V$: $-\,\underline{v} + \,\underline{v} = \,\underline{0} \in V$ - Inverz elem.
- $\exists! 1 \in \mathbb{K}$: $1\,\underline{v} \in V$ - Számtest egységeleme.

4.2. Lineáris függetlenség:

$\{\,\underline{v}_i\}_{i=1}^n$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i\,\underline{v}_i = 0 \leftrightarrow \lambda_i = 0$, $\forall i = 1 \ldots n$.

4.3. Bázis:

$\{\,\underline{v}_i\}_{i=1}^n$ bázis V vektortérben, ha lineárisan független és nem bővíthető tovább.
Példa: $\mathbb{R}^3$: $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$, illetve $\mathbb{R}^2$: $\underline{i}$, $\underline{j}$. Bázis elemszáma $\equiv \dim(V)$ a vektrotér dimenziószáma.
Miért rendelkezik olyan kitüntetett szereppel a bázis? A bázis elemeinek lineáris kombinációjával a vektortér minden eleme/vektora megadható!
Példák:

- Legyen V-ban bázis az $\{\,\underline{e}_1, \,\underline{e}_2, \,\underline{e}_3\}$, ekkor $\forall v \in V$ esetén *egyértelműen létezik* olyan $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}$, hogy $\underline{v} = v_1\,\underline{e}_1 + v_2\,\underline{e}_2 + v_3\,\underline{e}_3$. Figyelem: $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ nem biztos, hogy merőlegesek, illetve hogy hosszuk egységnyi!
- $\mathbb{R}^3$-ban bázist alkotnak a Descartes-koordinátarendszer egységvektorai, $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$, vagyis minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$-hez *egyértelműen léteznek* olyan $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{v} = v_1\,\underline{i} + v_2\,\underline{j} + v_3\,\underline{k}$.

4.4. Skaláris szorzat:

A vektortér önmagával vett Descartes szorzatából képez le a számtestbe:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

Tulajdonságai:

- Szeszkvilineáris (valós esetben bilineáris): $\langle \lambda \underline{v}, \underline{u} \rangle = \lambda^* \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$, $\langle \underline{v}, \underline{\lambda u} \rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$, azaz első változóban konjugáltan lineáris, míg a második változójában lineáris.
- Konjugált szimmetrikus (valós esetben szimmetrikus): $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle^*$.
- Pozitív definit $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$, $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0 \leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$.
- $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{u} \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle + \langle \underline{v}_2, \underline{u} \rangle$, illetve $\langle \underline{v}, \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle + \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle$
- Fontos (!!!): A skaláris szorzat nem asszociatív: $\underline{a} \cdot \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle \neq \langle \underline{a} \cdot \underline{b} \rangle \cdot \underline{c}$

4.5. Geometriai definíció (most speciálisan $\mathbb{R}^3$-ban):

$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = |\underline{v}_1||\underline{v}_2| \cos(\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2))$, ahol $\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ a két vektor által bezárt szög.

4.6. Skaláris szorzat bázisban, most speciálisan $\mathbb{R}^2$-ben:

$\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\underline{w} = (w_1, w_2)$ valamilyen bázisban, ekkor a skaláris szorzat tulajdonságai alapján $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2, w_1 \underline{e}_1 + w_2 \underline{e}_2 \rangle = v_1 w_1 \langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle + v_1 w_2 \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle + v_2 w_1 \langle \underline{e}_2, \underline{e}_1 \rangle + v_2 w_2 \langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle$.
Ha $\left\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \right\rangle =$
1 , ha i=j
0 , ha i≠ j,
azaz a bázisvektorok ortonormálisak, akkor visszakapjuk a jól ismert középsikolai eredméynt, $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$.

4.7. Feladatok:

- Legyen $\underline{a} = (1, 5, 2)$, $\underline{b} = (-2, 1, 2)$:
  $\underline{a} + \underline{b} = (-1, 6, 4)$, $\underline{a} - \underline{b} = (3, 4, 0)$, $3\,\underline{a} = (3, 15, 6)$, $-\frac{1}{2}\,\underline{b} = \left(-1, \frac{1}{2}, 1\right)$, ahol egyszerűen minden műveletet komponensenként végeztünk el, illetve nem mondtuk ki, hogy milyen bázisban dolgozunk(!). Ha sakárszorzatot is ki kellett volna számolnunk, akkor lett volna csak szükség a bázis specifikálására!
- $\underline{v}_1 = (1, 3, 2)$, $\underline{v}_1 = (-3, 1, 2)$:
  $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 4$.
  $|\underline{v}_1| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, $|\underline{v}_1| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, $\cos(\varphi) = \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{|\underline{v}_1||\underline{v}_2|} = \frac{4}{14}$.
- Legyen $\underline{a} = (3, 1, -1)$, $\underline{b} = (3, 4, 12)$. Határozzuk meg a két vektor átlal bezárt szöget:
  A szokásos módon elősző a koszinuszt adjuk meg a skaláris szorzás

segítségével: $\cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b})) = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}$.
$|\underline{a}| = \sqrt{11}$, $|\underline{b}| = 13$, illetve $\underline{a}\cdot\underline{b} = 1$, ahonnan $\cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b})) = \frac{1}{13\sqrt{11}} \rightarrow$ $\varphi = 1.547$.

- Lineáris függetlenség: függetlenek-e az $\underline{a} = (2, -2)$ és a $\underline{b} = (1, 2)$ vektorok, ismét a bázis megválasztás nem fontos, a kérdés az, hogy tudunk-e olyan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ számokat találnunk, hogy $\lambda_1\underline{a} + \lambda_2\underline{b} = 0$ úgy, hogy $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Mint mindig most is kompenensenként írjuk ki a megfelelő egyenlőséget:

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{4.1}$$
$$-2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \tag{4.2}$$

  (4) $\rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$, amit visszaírva az első egyenletbe, $\lambda_1 = 0$,$\lambda_2 = 0$ adódik, tehát $\underline{a}$ és $\underline{b}$ függetlenek.
  Megjegyzés: ha csak két vektorunk van, elég lecsekkolni, hogy létezik-e olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{a} = \lambda\underline{b}$,

- Függetlenek-e egymástól a fenti $\underline{a}$, $\underline{b}$ és a $\underline{c} = (8, 4)$ vektorok. A válasz az, hogy nyilván nem, hiszen csak két komponensünk van, de három vektorunk, ekkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$-re úgy is tekinthetünk mint bázisra, hiszen maximálisan lineárisan független rendszert alkotnak, a kérdés tehát úgy is feltehető, hogy mik a $\underline{c}$ vektor kifejtési együtthatói ebben a bázisban. Ismét komponensenként érdemes felírni a $\underline{c} = \lambda_1\underline{a} + \lambda_2\underline{b}$-ből fakadó egyenlőségeket:

$$8 = 2\lambda_1 + \lambda_2, \tag{4.3}$$
$$4 = -2\lambda_1 + 2\lambda_2. \tag{4.4}$$

  Összeadva két egyenletet, azt kapjuk, hogy $\lambda_2 = 4$, ahonnan $\lambda_1 = 2$.

- Ha két vektor skalárszorzata zérus, akkor a vektorok merőlegesek egymásra! Legyen $\underline{a} = (3, -1, 2)$ és $\underline{b} = (2, 5, \lambda)$. Hogyan válasszuk meg λ értékét, hogy a két vektor merőleges legyen egymásra. Ehhez írjuk fel a λ paraméter segítségével a skaláris szorzatot, ahol λ értékét úgy kell megválasztanunk, hogy a skaláris szorzat nulla legyen:

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = 6 - 5 + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}.$$

- Legyen $\underline{a} = (2, 0, -1)$, $\underline{b} = (3, -2, 1)$, határozzuk meg a két vektor által bezárt szöget. Mint tudjuk a vektorok hosszával és bezárt szögével a következő képp fejezhető ki a skaláris szorzat, $\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b})) = 5$, ahol az utolsó egyenlőség a komponensekből számolt skaláris szorzatból következik, a hosszúságok pedig $|\underline{a}| = \sqrt{5}$, $|\underline{b}| = \sqrt{14}$. Innen a bezárt szög koszinusza egyszerűen $\cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b})) = \frac{5}{\sqrt{70}}$, ahonnan a szög $\varphi(\underline{a}, \underline{b}) \approx 0.93$.

- Adott vektorra való vetítés, arra merőleges vektor meghatározása stb.
  - Határozzuk meg az $\underline{a} = (5, -3, 1)$ irányába mutató egységvektort. Ilyenkor nincs más dolgunk, mint leosztani a vektort a saját hosszával, ahol most feltesszük, hogy Descartes-koordináta rendszerben dolgozunk, azaz $|\,\underline{a}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{35}$. Vagyis $\underline{n}_a = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(5, -3, 1)$.
  - Legyen $\underline{b} = (2, 1, 3)$, adjuk meg a $\underline{b}$-nek $\underline{a}$-val párhuzmos kompnensének hosszát.
    Ehhez venünnk kell a két vektor által bezárt szöget és megszoroznunk $|\,\underline{b}|$-vel. Későbbiekben hasznos lesz a következő egyszerű módszer használata:
    $b_{\|} = \underline{n}_a \cdot \underline{b}$, ugyanis ez nem mással egyenlő, $\underline{n}_a$ definíciója alapján, mint $\underline{n}_a \cdot \underline{b} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|} = \cos(\varphi(\underline{a}, \underline{b}))\,|\,\underline{b}|$. Vagyis $\underline{b}_{\|} = \underline{n}_a b_{\|} = \frac{2}{7}(5, -3, 1)$.
    Most határozzuk meg az $\underline{a}$-ra merőleges komponenst, $\underline{b}_{\perp}$. Ehhez felhasználjuk, hogy $\underline{b} = \underline{b}_{\|} + \underline{b}_{\perp}$, vagyis $\underline{b}_{\perp} = \underline{b} - \underline{b}_{\|}$. Ami a koordináták alapján nem más mint
    $$\underline{b}_{\perp} = (2, 1, 3) - \frac{2}{7}(5, -3, 1) = \frac{1}{7}(4, 13, 19)\,.$$
  - Legyen $\underline{a} = (-2, 6, 1)$ és $\underline{b} = (1, -1, 0)$. Határozzuk meg ismét a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$-ra merőleges és azzal párhuzamos komponenseit. Ehhez először ismét adjuk meg az $\underline{a}$ irányába mutató egységvektort, $\underline{n}_a = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{1}{\sqrt{41}}(-2, 6, 1)$. Most a párhuzamos komponens $\underline{b}_{\|} = (\underline{n}_a \cdot \underline{b})\,\underline{n}_a = \frac{-10}{41}(-2, 6, 1)$. Innen pedig a merőleges komponens: $\underline{b}_{\perp} = \underline{b} - \underline{b}_{\|} = (1, -1, 0) - \frac{10}{41}(-2, 6, 1) = \frac{1}{41}(61, -101, -10)$.
- Geometriai feladatok:
  Adott egy háromszög, melynek csúcsai a csúcspontokba mutató helyvektorok koordinátátival együtt A, $\underline{r}_A = (2, -5, 1)$; B, $\underline{r}_B = (6, -3, 5)$; C, $\underline{r}_C = (6, -4, 9)$.
  - Határozzuk meg a háromszög szögeit.
    Ehhez először megadjuk a csúcsok közötti vektorokat: $\vec{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = (4, 1, 8)$, $\vec{AB} = \underline{r}_B - \underline{r}_A = (4, 2, 4)$, $\vec{BC} = \underline{r}_C - \underline{r}_B = (0, -1, 4)$. Ekkor a kérdéses szögek koszinuszai egyszerűen származtathatóak a megszokott módon a skaláris szorzat és a vektorok hosszának ismeretében. Először a vektorok hosszait adjuk meg: $\left|\vec{AC}\right| = 9$, $\left|\vec{AB}\right| = 6$, $\left|\vec{BC}\right| = \sqrt{17}$.
    Ezek alapján a megfelelő szögek:
    $\cos\Big(\varphi\Big(\vec{AC}, \vec{AB}\Big)\Big) \equiv \cos(\alpha) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{50}{54} \to \alpha = 0.387$.

$\cos\Big(\varphi\Big(\vec{BC},\vec{BA}\Big)\Big) \equiv \cos(\beta) = \frac{\vec{BC}\cdot\vec{BA}}{|\vec{BC}||\vec{BA}|} = \frac{-14}{6\sqrt{17}} \to \beta = 2.17.$
$\cos\Big(\varphi\Big(\vec{CB},\vec{CA}\Big)\Big) \equiv \cos(\gamma) = \frac{\vec{CB}\cdot\vec{CA}}{|\vec{CB}||\vec{CA}|} = \frac{31}{9\sqrt{17}} \to \gamma = 0.582.$
Ahol mindenütt kihasználtuk, hogy $\vec{AC} = -\vec{CA}$, illetve hasonlóan $\vec{AB} = -\vec{BA}$, $\vec{BC} = -\vec{CB}$.

4.7.1. Vektorok keresztszorzata/vektoriális szorzata:

$\times$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ellenben a skaláris szorzattal ennek a műveletnek csak $\mathbb{R}^3$-ban van értelme.
Geometriai definíció: $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ esetén a $\underline{v} = \underline{a} \times \underline{b}$ merőleges mind az $\underline{a}$, mind a $\underline{b}$ vektorokra és a hossza $|\underline{v}| = |\underline{a}||\underline{b}|\sin(\varphi(\underline{a},\underline{b}))$. A definícióból is látható, hogy ez nem mást ad meg, mint az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített paralelogramma területét.
A keresztszorzás tulajdonságai:

- $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$, jobbkéz szabály alapján lehet meghatározni. - Antikommutatív:
- $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$. -összeadásra disztributív.
- $\lambda\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times \lambda\underline{b}$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ esetén-számmal való szorzásra asszociatív.
- $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \neq (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$. -nem asszociatív!

Kiszámítása Descartes koordinátarendszerben, az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisvektorok segítségével.
A definícióból és jobbkéz szabályból következően a következő egyenlőségek igazak a Descartes koordináta rendszer ortonormált bázisvektoraira:

- $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{0}$
- $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$, $\underline{j} \times \underline{j} = \underline{0}$
- $\underline{k} \times \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$

Ez alapján két tetszőleges vektor vektoriális szorzata a következő: $\underline{a} \times \underline{b} = \big(a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}\big) \times \big(b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}\big) = a_1b_1\underline{i} \times \underline{i} + a_1b_2\underline{j} \times \underline{i} + a_1b_3\underline{i} \times \underline{k} + a_2b_1\underline{j} \times \underline{i} + a_2b_2\underline{j} \times \underline{j} + a_2b_3\underline{j} \times \underline{k} + a_3b_1\underline{k} \times \underline{i} + a_3b_2\underline{k} \times \underline{j} + a_3b_3\underline{k} \times \underline{k} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\underline{k} \equiv (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.
Alternatív kiszámítási mód: 3×3-as determináns segítségével: $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ Legyen $\underline{a} = (2,-2,-3)$, illetve $\underline{b} = (0,4,7)$, adjuk meg a keresztszorzatukat:
Behelyettesítve a fentebb írt képletbe, egyszerűen adódik az eredmény:

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \equiv (-2,-14,8)\,.$$

Adott egy háromszög, melynek csúcsai a megfelelő helyvektorokkal együtt a következők:
A, $\underline{r}_A = (1,-1,1)$; B, $\underline{r}_B = (2,1,-1)$; C, $\underline{r}_C = (-1,-1,-2)$. A keresztszorzás segítségével határozzuk meg a háromszög területét. Mint tudjuk az $|\,\underline{a} \times \underline{b}|$ vektorhossz a két vektor által kifeszített paralelogramma területével egyenlő, vagyis ennek a fele éppen a két vektor által alkotott háromszög területével egyenlő. Vagyis az ABC hárosmzög területéhez ki kell számítanunk az $\left|\vec{AC} \times \vec{AB}\right|$ értéket. Ehhez a megfelelő vektorok $\vec{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = (-2,0,-3)$, $\vec{AB} = \underline{r}_B - \underline{r}_A = (1,2,-2)$. Innen egyszerűen a keresztszorzat, ismét alkalmazva az ismert képletet:
$T_{ABC} = \left|\vec{AC} \times \vec{AB}\right|/2 = |(-6,-1,4)|/2 = \frac{\sqrt{53}}{2}$.

4.7.2. Vegyes szorzat:

Vegyes szorzat alatt a következőt érjük: $(\,\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\,\underline{b} \times \underline{c})$
Legyen $\underline{a} = (2,-2,5)$, $\underline{b} = (-1,2,2)$, $\underline{c} = (0,2,-3)$, határozzuk meg az $(\,\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ vegyes szorzatot. A kiszámítási szabály alapján $\underline{b} \times \underline{c} = (-10,-3,-2) \rightarrow$ $\underline{a}(\,\underline{b} \times \underline{c}) = -20 + 6 - 10 = -24$.
Számítsuk most ki a $(\,\underline{b}, \underline{c}, \underline{a})$ vegyes szorzatot, ehhez először meg kell mondanunk a $\underline{c} \times \underline{a}$ keresztszorzat értékét, $(c_2a_3 - c_3a_2, c_3a_1 - c_1a_3, c_1a_2 - c_2a_1) = (-4,-6,-4)$.
Ezt követően a skaláris szorzás eredménye pedig $(\,\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}) = (-1)\cdot(-4) + (-6)\cdot 2 + (-8)\cdot 2 = -24$, vagyis ugyanaz az érték mint az előző esetben, ez is mutatja azt az általános igazságot, hogy a vegyes szorzat értéke nem változik, ha a vektorokat benne ciklikusan permutáljuk, illetve -1-eresére változik, ha nem ciklikus permutációt hatjunk végre:
$(\,\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\,\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}) = (\,\underline{b}, \underline{c}, \underline{a})$, illetve $(\,\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = -(\,\underline{a}, \underline{c}, \underline{b}) = (\,\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}) = (\,\underline{c}, \underline{b}, \underline{a})$.

4.7.3. Indexes számolás:

- Kronecker-delta:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ ha } i = j \\ 0, \text{ ha } i \neq j \end{cases} \tag{4.5}$$

- Levi-Civita szimbólum:

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, \text{ ha } (i,j,k) \text{ az } (1,2,3) \text{ ciklikus permutációja} \\ -1, \text{ ha } (i,j,k) \text{ az } (1,2,3) \text{ nem ciklikus permutációja} \\ 0, \text{ ha } (i,j,k) \text{ az } (1,2,3)\text{-nak nem permutációja} \end{cases} \tag{4.6}$$

- Példák:
$\varepsilon_{1,3,2} = -1$, mert $(1,3,2)$ nem ciklikus permutációja $(1,2,3)$-nak. Hasonlóan $\varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1$.
$\varepsilon_{3,1,2} = 1$, mert $(3,1,2)$ ciklikus permutációja $(1,2,3)$-nak. Hasonlóan $\varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon_{2,3,1} = 1$.
$\varepsilon_{1,1,2} = 0$, mert $(1,1,2)$ nem permutációja $(1,2,3)$-nak.

- Skaláris szorzat Kronecker-delta segítségével:
$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} v_i \delta_{i,j} w_j = \sum_{i=1}^{3} \delta_{i,i} v_i w_i = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i, \tag{4.7}$$
mivel minden $i \neq j$ esetén $\delta_{i,j} = 0$, egyébként meg $\delta_{i,i} \neq 0$, illetőleg azonosan eggyel egyenlő.

- Vektoriális szorzat Levi-Civita szimbólum segítségével:
$$(\underline{v} \times \underline{w})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} v_j w_k.$$

- Fontosabb indexes összefüggések:
$\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,l} = 2\delta_{k,l}$
$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{i,l,m} = \delta_{j,l}\delta_{k,m} - \delta_{j,m}\delta_{k,l}$
Einstein konvenció: ha egy index kétszer fordul elő automatikusan úgy kell érteni, hogy összegzünk arra az indexre, tehát fölösleges a szumma kiírása!

- Példák:
$$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \delta_{i,k} \varepsilon_{k,l,m} a_j b_j c_l d_m.$$
Mivel a Kronecker-delta indexeinek meg kell egyezniük, nás különben nillát adnak $\delta_{i \neq k} = 0$, az összegzésben $k = i$-t kapunk, ahonnan $\sum_{j,l,m=1}^{3} \varepsilon_{i,l,m} a_j b_j c_l d_m = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{i,l,m} c_l d_m$. Itt az első szumma eredménye egyszerűen csak a $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzata, illetve a másdoik szumma éppen a $c \times d$ keresztszorzat i-ik komponense, vagyis az eredmény:
$$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \delta_{i,k} \varepsilon_{k,l,m} a_j b_j c_l d_m = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle (\underline{c} \times \underline{d})_i \,.$$
Számítsuk ki a következő szummát:
$$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \delta_{k,m} \delta_{j,m} \varepsilon_{l,m,n} c_k d_m.$$

Itt ismét először kihasználjuk, hogy a Kronecker-delták indexeinek meg kell egyezniük, vagyis az összegzésben csak azo ka tagok nem fognak eltűnni, ahol $k = m$ és $j = m$, ahonnan már csak egy két indexre való szummázást kell elvégeznünk:

$$\sum_{j,k,l,m=1}^{3} \delta_{k,m}\delta_{j,m}\varepsilon_{l,m,n}c_k d_m. = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{l,m,n}c_m d_m,$$

ahol az utolsó tagra gondolhatunk úg, mint egy vektor melynek az m-edik eleme a $c_m d_m$, illetve megjelenik mellette a csupa egyest tartalmazó vektor, hiszen ekkor ha $\underline{f}^T = (1, 1, 1)$, akkor $f_n = 1$, ahonnan

$$\sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{l,m,n}c_m d_m f_n = \left(\underline{g} \times \underline{f}\right)_l,$$

ahol $g_m = c_m d_m$.
Indexes számolás a hármas vektoriális szorzat kiszámításához: $(\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}))_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j (\underline{b} \times \underline{c})_k = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k}\varepsilon_{k,l,m} a_j b_l c_m = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{k,i,j}\varepsilon_{k,l,m} a_j b_l c_m$. Itt az utolsó lépést azért tehettük meg, mert a Levi-Civita szimbólum inexei egymás között, a definíció alapján, ciklikusan permutálhatóak, továbbá ebben az alakban alkalmazható rájuk a fentebb írt azonosság, vagyis a következő adódik: $\sum_{j,k,l,m=1}^{3} (\delta_{j,l}\delta_{k,m} - \delta_{j,m} - \delta_{k,l})\, a_j b_l c_m = \sum_{m=1}^{3} b_i a_m c_m - \sum_{j=1}^{3} c_i a_j b_j = (\underline{c} \cdot \underline{a})\, b_i - (\underline{a} \cdot \underline{b})\, c_i$, ahol most csak az i-edik komponensre vezettük le az egyenlőséget, de mivel láthatóan semmi nem függött a komponens megválasztásától, minden $i = 1, 2, 3$ esetén is igaz az állítás, vagyis

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\, \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\, \underline{c}.$$

Két vektoriális szorzat skalráis szorzata:

$$\langle\!\langle\, \underline{a} \times \underline{b}), (\underline{c} \times \underline{d})\rangle$$

Itt elősrször kiiírjuk a skaláris szorzás Korncker-deltás verzióját, $\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{i,j} (\underline{a} \times \underline{b})_i (\underline{a} \times \underline{b})_j$, majd kiírjuk a két keresztszorzat megfelelő komponenseit:

$$\sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} \delta_{i,j}\varepsilon_{i,k,l}\varepsilon_{j,m,n} a_k b_l c_m d_n,$$

majd egybeejtjük a Kroncker-delta két indexét, $i = j$-re végezzük el az összegzést, $\sum_{i,k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{i,k,l}\varepsilon_{i,m,n} a_k b_l c_m d_n$, amit átírhatunk a két Levi-Civita szimbólum szorzatánál tanult összefüggés alapján, $\sum_{k,l,m,n=1}^{3} (\delta_{k,m}\delta_{l,n} - \delta_{k,n}\delta_{l,m})\, a_k b_l c_m d_n$. Ezt az összegzést már könnyen el tudjuk végezni ha egybeejtjük a következő indexeket $k \to m$, $l \to n$, illetve a második tagban, $k \to n$, $l \to m$. Innen a végső két indexre felírt összegzés a következő:

$$\sum_{m,n=1}^{3} a_m b_n c_m d_n - a_n b_m c_m d_n = \left(\sum_{n=1}^{3} b_n d_n\right)\left(\sum_{m=1}^{3} a_m c_m\right) - \left(\sum_{n=1}^{3} a_n d_n\right)\left(\sum_{m=1}^{3} b_m c_m\right) = \langle\, \underline{a},\, \underline{c}\rangle \langle\, \underline{b},$$

Hármas vektoriális szorzat skalárszorzate egy negyedik vektorral:

$$\langle\, \underline{a},\, \underline{b} \times (\, \underline{c} \times\, \underline{d})\rangle\,.$$

Először kiírjuk a skaláris szorzatot a Kornecker-delta segítségével, $\sum_{i,j=1} \delta_{i,j} a_i (\, \underline{b} \times (\, \underline{c} \times\, \underline{d}))_j$. Ezt követően kiírjuk az első keresztszorzatnak a j-edik komponensét, azaz $\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \delta_{i,j} \varepsilon_{j,k,l} a_i b_k (\, \underline{c} \times\, \underline{d})_l$. Ez követőe na maradék $(\, \underline{c} \times\, \underline{d})_l$ keresztszorzat l-edik komponensét is kiírjuk, ami utá na következő kapjuk:

$$\sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} \delta_{i,j} \varepsilon_{j,k,l} \varepsilon_{l,m,n} a_i b_k c_m d_n = \sum_{j,k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l} \varepsilon_{l,m,n} a_j b_k c_m d_n,$$

ahol csak egybeejtettük a Kornecker-deltának megfelelően az i és a j indexet, $i \to j$. ezt követően ismét alkalmazzu ka két Levi-Civita szimbólum szorzatára vonatkozó azonosságot, miután az első szimbólum indexeit ciklikusan permutáltuk, $\varepsilon_{j,k,l} \to \varepsilon_{l,j,k}$, ami alapján a következőt írhatjuk fel:

$$\sum_{j,k,m,n=1}^{3} (\delta_{j,m}\delta_{k,n} - \delta_{j,n}\delta_{k,m})\, a_j b_k c_m d_n,$$

egybeejtve a Kronecker-deltáknak megfelelő indexeket a következő kapjuk:

$$\sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k c_j d_k - \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k c_k d_j = \langle\, \underline{a},\, \underline{c}\rangle \langle\, \underline{b},\, \underline{d}\rangle - \langle\, \underline{a},\, \underline{d}\rangle \langle\, \underline{b},\, \underline{c}\rangle\,.$$

Két vektoriális szorzat vektoriális szorzatának kiszámítására:

$$((\, \underline{a} \times\, \underline{b}) \times (\, \underline{c} \times\, \underline{d}))\,:$$

Eleőször is általánosan az i-edik komponenst vizsgáljuk ismlt és kiírjuk a definíciót

$$((\, \underline{a} \times\, \underline{b}) \times (\, \underline{c} \times\, \underline{d}))_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} (\, \underline{a} \times\, \underline{b})_j (\, \underline{c} \times\, \underline{d})_k\,,$$

ezt követően a két keresztszorzatot írjuk ki egyesével, vagyis$(\underline{a} \times \underline{b})_j = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{j,l,m} a_l b_m$, illetve $(\underline{c} \times \underline{d})_k = \sum_{n,p=1}^{3} \varepsilon_{k,n,p} c_n d_p$, összerakva a két kifejezést a következőt kapjuk:

$$((\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}))_i = \sum_{j,k,l,m,n,p=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{j,l,m} \varepsilon_{k,n,p} a_l b_m c_n d_p.$$

Most alaklmazzuk az $\varepsilon_{j,k,i}\varepsilon_{j,l,m} = \delta_{k,l}\delta_{i,m} - \delta_{k,m}\delta_{i,l}$ összefüggést a $\varepsilon_{i,j,k}\varepsilon_{j,l,m} = \varepsilon_{j,k,i}\varepsilon_{j,l,m}$ tagra, ahol imsét végre hajtottunk egy ciklikus permutációt. Innen a következő kapjuk:

$$\sum_{k,l,m,n,p=1}^{3} (\delta_{k,l}\delta_{i,m} - \delta_{k,m}\delta_{i,l})\, \varepsilon_{k,n,p} a_l b_m c_n d_p = \sum_{k,n,p=1}^{3} \varepsilon_{k,n,p} (a_k b_i c_n d_p - a_i b_k c_n d_p)\,,$$

ahol csak összeejtettük az indexet a Kornecker-deltáknak megfelelően, vagyis az első két delta szerint $l \to k, m \to i$, illetve a második két delta szerint $m \to k, l \to i$. Most a $\sum_{n,p=1}^{3} \varepsilon_{k,n,p} c_n d_p$ definíció alapján $(\underline{c} \times \underline{d})_k$, ahonnan $\sum_{k,n,p=1}^{3} \varepsilon_{k,n,p}(a_k b_i d_n c_p - a_i b_k c_n d_p) = b_i \langle \underline{a}, \underline{c} \times \underline{d} \rangle - a_i \langle \underline{b}, \underline{c} \times \underline{d} \rangle$, vagyis általánosan:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = \underline{b} \langle \underline{a}, \underline{c} \times \underline{d} \rangle - \underline{a} \langle \underline{b}, \underline{c} \times \underline{d} \rangle$$

5. Analítikus geometria

5.1. Egyenes egyenlete:

Egy egyenes meghatározosához a háromdimenziós térben két megkötésre, két egyenletre van szükségünk, így korlátozódunk le 1 dimenzióra, ami nem más mint egy egyenes!
Egyenes egyenlete 2 pontja alapján: Legyen $A(x_1, y_1, z_1)$ és $B(x_2, y_2, z_2)$. Ekkor mivel az egyenes minden pontjának rajta kell lennie a két pontot összekötő egyenesen, egy tetszőleges pontot kifejezhetünk egy t paraméter segítségével ("milyen messze van A-tól és milyen közel B-hez"). Legyen $P = (x, y, z)$ az egyenes egy pontja, ekkor

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\
y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\
z &= z_1 + t(z_2 - z_1)
\end{aligned}$$

Innen kifejezve t-t mndegyi kegyenletből a következő adódik:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Figyelem ez összesen csak kettő egyenletet jelent, hiszen "csak két egyenlőség jelünk van", illetve bármelyik kettő kifejezés egyenlősége implikálja a harmadikat!

Egyenes egyenlete irányvektor és adott pont alapján: Legyen $P_0 = (x_0, y_0 z_0)$ az egyenes egy adott pontja és az egyenessel párhuzamos vektor, az egyenes *irányvektora* pedig $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Ekkor az egyenes egy tetszőleges pontjába, $P = (x, y, z)$, úgy juthatunk el, hogy adott t-szer hozzáadjuk P_0 pontba mutató helyvektorhoz, $\underline{r}_0$-hoz, az irányvektort

$$\underline{r}_P = (x, y, z) = \underline{r}_0 + t\,\underline{v},$$

amit komponensenként kiírva

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + tv_x \\
y &= y_0 + tv_y \\
z &= z_0 + tv_z \ldots \\
\rightarrow \frac{x - x_0}{v_x} &= \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}
\end{aligned}$$

ami láthatóan ugyanúgy a fenti két egyenletre vezet, ahol egszerűen $\underline{v} = \vec{AB}$, $v_i = (\underline{r}_B)_i - (\underline{r}_A)_i$!

Példák:

- Legyen az egyenes irányvektora $\underline{v} = (1,1,0)$, illetve egy pontja $P_0 = (1,2,1)$. Ekkor a definíció alapján a két egyenlet:

$$x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{0}(???)$$

Láthatóan butaság adódik a nullával való osztás miatt. Az ellentmondás oka, hogy először mindig az $x = x_0 + tv_x, \ldots$ egyneleteket kell felírni, amiből ekkor triviálisan adódik, hogy

$$\begin{aligned} x - 1 &= y - 2 \\ z &= 1, \end{aligned}$$

ahol az utóbbi azt jelenti, hogy $z = 1$ állandó, akár hol tartozkodunk az egyenesen, vagyis az egyenes az $x - y$ síkkal párhuzamosan fut a $z = 1$ magasságban!

- Legyen $A = (0,1,-2)$, $B = (2,-1,1)$. Most először adjunk meg egy irányvektort (mindig érdemes ezzel kezden, hogy lássuk, nem nulla-e egy komponense, mely esetben az előző eset szerint kell eljárni!), $\underline{v} = \vec{AB} = (2,-2,-1) \rightarrow$ alkalamzható a

$$\frac{x}{2} = \frac{1-y}{2} = -z - 2$$

kifejezés, ahol most az egyens ismert pontjának az A pontot kellett vennünk, a $\underline{v} \equiv \vec{AB}$ konstrukció miatt!

- Legyen $A = (-2,3,1)$, $B = (-1,4,2)$. Ekkor az irányvektorral kezdünk ismét (ha valamelyik komponense ennek nullának adódna, rögtön tudjuk, hogy a megfelelő koordinátra értéke rögzített lenne!), $\underline{v} = \vec{AB} = (1,1,1)$ Innen az egyenes egyenlete:

$$x + 2 = y - 3 = z - 1$$

- Legyen $A = (4,0,-1)$, $B = (5,0,2)$, $C = (6,0,-7)$. Egy egyenesre esnek-e? Ehhez elegendő megvizsgálnunk, hogy két tetszőleges kiválasztott pont páros által kapott egyens irányvektora párhuzamos-e $\Rightarrow$ $\underline{v}_{AB} = \vec{AB} = (1,0,3)$, $\underline{v}_{AC} = (2,0,-8)$, ami nyilván nem párhuzamos v_{AB}-vel. Vagyis a három pont nem esik egy egyenesre.

- Legyen $A = (1,-2,-1)$, $B = (3,-2,-1)$. Irányvektor: $\underline{v} = \vec{AB} = (2,0,0)$. Ekkor ismét felírva

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_x = 1 + 2t \\ y &= y_0 + tv_y = -2 \\ z &= z_0 + tv_z = -1, \end{aligned}$$

ami nem mást jelent, mint hogy az egyenes párhuzamos az x tengellyel és átmegy az $y=-2$ és $z=-1$ ponton!

5.2. Egyenes és pont távolsága:

Adott egy e egyenes, melynek ismerjük az őt jellemző egyenletet, vagyis egy pontját és az irányvektorát, ekkor meg tudjuk adni az egyenesnek két tetszőleges pontját is! Legyenek ezek ismét $A=(x_1,y_1,z_1)$, $B=(x_2,y_2,z_2)$ és vegyünk egy tetszőleges $P(x,y,z)$ pontot, melynek az egyenestől vett távolságát keressük, vagyis a P pontot és az egyenest összekötő, az egyenesre merőleges szakasz hosszát. Ha vesszük a $\left|\vec{PA}\times\vec{AB}\right|$ keresztszorzat nagyságát, és leosztjuk a $\left|\vec{AB}\right|$ hosszal, $\frac{\left|\vec{PA}\times\vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|}=\sin(\alpha)\left|\vec{PA}\right|$, ahol α a $\vec{PA}$ és az egyenes irányvektora által bezárt szög, így a fenti kifejezés éppen az egyenestől vett távolságot adja vissza, tehát:

$$d(P,e)=\frac{\left|\vec{PA}\times\vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|}.$$

Példák:

- Legyen $P=(-2,3-7)$ és $e:\ \frac{x-1}{3}=2-y,\ z=2$. először megadjuk a két pontot az egyenes egyenlete alapján: $A=(1,2,2)$, illetve az irányvektor, $\underline{v}=(3,-1,0)\equiv\vec{AB}$ alapján a második pont $B=(4,1,2)$. Innen a szükséges vektor $\vec{PA}=(3,-1,9)$, illetve $\vec{PA}\times\vec{AB}=(-5,-15,0)$, ahonnan

$$\frac{\left|\vec{PA}\times\vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|}=\frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=5.$$

- Legyen $P=(-1,2,1)$, illetve $e:$

$$\begin{aligned} x&=1+2t\\ y&=2-t\\ z&=3+3t \end{aligned}$$

  Ekkor az első pont mindig az egyenletek konstans tagjai, vagyis $A=(1,2,3)$ és $\vec{PA}=(2,0,2)$ illetve az irányvektor, $\underline{v}\equiv\vec{AB}=(2,-1,3)$. Innen a keresztszorzat $\vec{PA}\times\vec{AB}=(2,-2,-2)$, ahonnan

$$\frac{\left|\vec{PA}\times\vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}.$$

- Legyen $P = (-2,4,1)$ és az egyenest most két pontjával paraméterezzük, $A = (-1,4,1)$ és $B = (0,0,0)$. Innen $\vec{PA} = (1,0,0)$ és $\underline{v} \equiv \vec{AB} = (1,-4,-1)$ illetve $\vec{PA} \times \vec{AB} = (0,1,-4)$, innen a távolság

$$\frac{\left|\vec{PA} \times \vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18}}.$$

5.3. Egyenesek távolsága:

Legyen két egyenes adott irányvektorokkal, $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, illetve adott pontokkal $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$, $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$. Ekkor a két egyenes távolsága, most elvezetés nélkül (órán táblán rajzos illusztráció lesz/volt):

$$d(e_1,e_2) = \frac{\left|\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)\right|}{|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2|}$$

Példák:

- Legyen $e_1 : x+4 = 8-2y = -z-1$, illetve e_2:

$$x = 4t-5$$
$$y = -3t+5$$
$$z = -5t+5$$

  Ekkor a két irányvektor: e_1 esetében az x,y,z együtthatóinak reciproka, $\underline{v}_1 = (1,-1/2,-1)$, illetve a második esetben t együtthatói, $\underline{v}_2 = (4,-3,-5)$. Az egyenesen ismert pontok pedig e_2 esetében a konstans tagok $P_2 = (-5,5,5)$, míg e_1 esetében a konstans tagok leosztva a koordináták, x,y,z együtthatóival és szorozva mínusz eggyel, $P_1 = (-4,4,-1)$, ahonnana két egyeneset összekötő vektor, $\vec{P_1P_2} = (-1,1,6)$. Most a vegyes szorzat értéke: $\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2) = 9/2$, illetve $|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2| = 3/2$, ahonnan a távolság:

$$d(e_1,e_2) = \frac{9/2}{3/2} = 3.$$

- Legyen $e_1 : \frac{2x-1}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{5z-6}{4}$, illetve e_2: $x = y = z$. Az irányvektorokat ismét leolvashatjuk a koordináták, x,y,z, együtthatóinak reciprokából, $\underline{v}_1 = (1,-3,5/4)$, illetve $\underline{v}_2 = (1,1,1)$. Illetve a két egyenes ismert pontjai, $P_1 = (1/2,-3,6/5)$, illetve $P_2 = (0,0,0)$, vagyis $\vec{P_1P_2} = (-1/2,3,-6/5)$. A keresztszorzatja a két irányvektornak, $|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2| = |(-7/4,1/4,4)| = \sqrt{3064}$, Illetve a vegyes szorzat $\left|\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)\right| = \frac{257}{40}$. Innen a távolság:

$$d(e_1,e_2) = \frac{256/40}{\sqrt{306}/4} = \frac{256}{10\sqrt{306}}.$$

- Legyen e_1 : $\frac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1$, illetve e_2: $2 - x = y - 5 = z + 1$. Az irányvektorok ismét a koordináták együtthatóinak reciproka, x, y, z, $\underline{v}_1 = (5, -1, 1)$, illetve $\underline{v}_2 = (-1, 1, 1)$. A két ismert pont ismét a számlálóban lévő értékek mínusz egyszeresei, $P_1 = (1, 2, 1)$, $P_2 = (2, 5, -1)$, ahonnan a két pont között mutató vektor $\vec{P_1P_2} = (1, 3, -2)$. Innen a vektoriális szorzatok nagysága $|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2| = |(-2, -6, 4)| = 3\sqrt{6}$, illetve $\left|\vec{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)\right| = 28$, vagyis a távolság:

$$d(e_1, e_2) = \frac{28}{3\sqrt{6}}$$

- Legyen $e_1 : x - 1 = y + 1 = z - 2$, illetve e_2: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$. Látható rögtön, hogy a két egyenes ismert pontja egybeesik, hiszen $P_1 = P_2 = (1, -1, 2)$, vagyis a távolságban megjelenő vegyes szorzat azonosan nulla, hiszen egy null vektor van skalárszorozva két irányvektor keresztszorzatával$\Rightarrow$ $d(e_1, e_2) = 0$, ahogyan várjuk is két egymást metsző egyenestől!

5.4. Sík egyenlete:

A háromdimenziós térben, $\mathbb{R}^3$, egy síkot egy pontjával és a síkra merőleges *normálvektorral* jellemzünk. Legyenek ezek $A = (A_x, A_y, A_z)$ illetve $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z)$, ekkor arra vagyunk kiváncsiak, hogy a sík $P = (x, y, z)$ pontjai milyen összefüggést elégítenek ki. Érezhetően ezt egyetlen egyenlet fogja megadni, mivel gondolhatunk úgy is a síkra, mint ami egy *megkötés* által *eggyel* csökkenti az eredeti háromdimenziós tér dimenziószámát. (Ha két megkötés, két egyenlet adná meg a kérdéses $P = (x, y, z)$ pontokat, akkor egy egydimenziós egyenest kapnánk, lásd később). Mivel $\underline{n}$ merőleges a síkra, minden vektorra is az, ami benne va na síkban, vagyis $\vec{AP} = (x - A_x, y - A_y, z - A_z)$ vektor merőleges $\underline{n}$-re:

$$\underline{n} \cdot \vec{AP} = n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 0,$$

Ezt nevezzük a sík alapegyeneletének, ami szokás a $Ax + By + Cz + D = 0$ alakban is felírni, amit általános egyenletnek neveznek! Itt láthatóan $A \equiv n_x$,$B \equiv n_y$,$C \equiv n_z$, illetve $D \equiv \underline{n} \cdot \underline{r}_A$, ahol $\underline{r}_A$ az A pontba mutató helyvektor.

Példák:

- Adott $A = (-1, 2, 0)$ és a sík egy normálvektora (Figyelem: a normálvektor egy konstans szorzó erejéig egyértelmű csak!) $\underline{n} = (0, 3, 0)$.

Definíció alapján legyen $P = (x, y, z)$, és ekkor

$$\underline{n} \cdot \vec{AP} = n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 3(y - 2) = 0$$
$$\Rightarrow y = 2,$$

ahol az utolsó lépésben átírtuk a sík egyenletét az általános alakra, amiből látszik, hogy ez nem más mint az $y = 2$ értéknél lévő $x - z$ síkkal párhuzamos sík!

- Adott $A = (3, 2, -2)$ és a sík egy normálvektora $\underline{n} = (2, 0, 3)$:
  Ismét az alapegyenlet:

  $$\underline{n} \cdot \vec{AP} = n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 2(x - 3) + 3(z + 2) = 0$$
  $$\Rightarrow 2x + 3z = 0 \rightarrow z = -\frac{2}{3}x$$

  Az általáos alak ismét többetmondó magának a síknak az elhelyezkedéséről: az $x - z$ síkban megadott $z = -\frac{2}{3}x$ egyenest tartalmazó y irányban végtelen síkról van szó!

- Most a sík három pontjának ismeretében határozzuk meg a sík pontjaira vonatkozó egyenletet! Ezt csinálhatjuk direktben, vagyis megoldjuk az általános egyenletet a 3 pont koordinátáinak ismeretében A, B, C, D-re. Ehelyett sokkal kéynelmesebb megkonstruálni a három pontból a sík két vektorát, abból a sík egy normálvektorát, majd véve egy tetszőleges pontot a három közül alkalmazni az alapegyenletre vonatkozó egyszerű összefüggést!
  Legyen $A = (1, 5, 1)$,$B = (2, -1, 1)$,$C = (4, 3, 1)$ és vegyük az $\vec{AB} = (1, -6, 0)$ és $\vec{AC} = (3, -2, 0)$ A és B, illetve A és C pontokat összekötő vektorok vektoriális szorzatát, ami a keresztszorzat definíciója alapján merőleges a síkra:

  $$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 0, 16) \equiv \underline{n}$$

  Innen már egyszerű dolgunk van, hiszen vegyük az A pontot, mint a sík egy pontját felhasználandó az alapegyenlet megadásához és ismét egy általános $P = (x, y, z)$ pontját a síknak:

  $$\underline{n} \cdot \vec{AP} = n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 16(z - 1) = 0$$
  $$\Rightarrow z = 1,$$

  vagyis sík nem más mint az $x - y$ sík a $z = 1$ pontban!

- Legyen $A = (2, 0, 0)$,$B = (-1, 0, 0)$,$C = (0, 2, -1)$. Innen a sík egyenletéhez először ismét kiszámítjuk az $\vec{AB} = (-3, 0, 0)$, illetve az $\vec{AC} =$

$(-2, 2, -1)$ vektorok keresztszorzatát, $\underline{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (0, -3, -6)$, ahonnan az alapegyenlet most is az A pont segítségével felírva:

$$-3(y-0) - 6(z-0) = 0 \to z = -\frac{y}{2}$$

Vagyis a sík a második, általános egyenlet alapján nem más mint a $z = -\frac{y}{2}$ egyenest követő sík az x irányban! Úgy is tekinthetünk rá, mint tetszőleges x esetén azon pontok, amik rajta vannak ezen az egyenesen.

5.5. Pont és sík távolsága:

Ismert az S sík és egy $\underline{n}$ normálvektora és egy $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, melynek a síktól vett távolságára vagyunk kíváncsiak, vagyis a pontot és a síkot összekötő, a síkra merőleges szakasz hosszára. Ehhez vegyünk egy tetszőleges pontot a síkban $P = (x, y, z)$ és kössük össze P_0-al, $\vec{PP_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$. Ekkor a sík és $\vec{PP_0}$ által bezárt szög szinusza éppen $\vec{PP_0}$ és $\underline{n}$ átlal bezárt koszinuszával egyenlő, amit viszont ki tudunk fejezni:

$$\cos\Big(\varphi\Big(\underline{n}, \vec{PP_0}\Big)\Big) = \frac{\underline{n} \cdot \vec{PP_0}}{|\underline{n}|\Big|\vec{PP_0}\Big|} \equiv \sin\Big(\varphi\Big(\vec{PP_0}, S\Big)\Big)$$

Innen a síktól vett távolság nem más mint

$$d(P_0, S) = \sin\Big(\varphi\Big(\vec{PP_0}, S\Big)\Big)\Big|\vec{PP_0}\Big| = \frac{\underline{n} \cdot \vec{PP_0}}{|\underline{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}},$$

Ahol A, B, C, D az általános egyenlet együtthatói!

Példák:

- Legyen az S sík egyenlete $2x - 4y + 2z = 1$ és a pont, aminek a távolságát keressük ettől az egyenestől $P_0 = (-1, 2, 1)$. A tanult összefüggés alapján:

$$d(P_0, S) = \frac{|2(-1) - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{24}}.$$

- Legyen az S sík egyenlete $S: -x + 8y + 10z = 0$ és keressük a $P_0 = (1, 1, 1)$ pont távolságát ettől az egyenestől. Ismét alkalmazva az összefüggést:

$$d(P_0, S) = \frac{|-1 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 10^2}} = \frac{17}{\sqrt{165}}$$

- Legyen $P_0 = (1, 1, 5)$,illetve a sík egyenlete $S : 2x + 3y - z = 0$, ekkor látahtóan P_0 pontjai kielégítik a sík egyenletét, P_0 rajta van a síkon, vagyis a számláló a $d(P_0, S)$ kifejezésében azonosan nulla, ahogyan vártuk!
- Legyen $P_0 = (1, 2, 3)$, illetve az S sík egyenlete $z = 2$. Ekkor az általános egyenlet együtthatói $C = 1$,$D = -2$, vagyis $d(P_0, S) = 1$, ahogyan vártuk, hiszen a sík az $x - y$-al párhuzamosan $z = 2$-ben helyzkedik el, így minden $z = 3$-al jellemzett pont $d = 1$ távolságra lesz tőle!

Ha sík és egyenes távolságát akarnánk megkeresni, akkor azt visszavezethetjük a sík és pont távolságára. Ugyanis az egyenes vagy metszi a síkot és ezáltal távolságuk $d(S, e) = 0$ vagy az egyenes normálvektora párhuzamos a sík normálvektorával. Utóbbi esetben az egyenes minden pontja azonos távolságra van a síktól, így akár csak egyet ismerve közülük vehetjük azon pont és sík távolságát.

5.6. Összegzés

Egyenes egyenlete: Ha p_0 egy ismert pont az egyenesen, $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{v}$ az egyenes irányvektora, akkor az egyenes egyenlete felírható mint:

$$\underline{r}_{p_0}(\alpha) = \underline{p}_0 + \alpha \cdot \underline{v} \tag{5.1}$$

felbontva komponenseire:

$$\begin{aligned} r_x(\alpha) &= \left(\underline{p_0}\right)_x + \alpha v_x \\ r_y(\alpha) &= \left(\underline{p_0}\right)_y + \alpha v_y \\ r_z(\alpha) &= \left(\underline{p_0}\right)_z + \alpha v_z \end{aligned}$$

ebből kifejezve az α paramétert:

$$\frac{x - (\underline{p}_0)_x}{v_x} = \frac{y - (\underline{p}_0)_y}{v_y} = \frac{z - (\underline{p}_0)_z}{v_z} \tag{5.2}$$

Egyenes és pont távolsága: $P = (p_x, p_y, p_z)$ egy pont, e pedig egy egyenes P_1 és P_2 ismert ponttal és $\underline{v}$ irányvektorral, ekkor a pont és egyenes távolsága:

$$d(P, e) = \frac{|\vec{PP_e} \times \vec{P_1P_2}|}{|\vec{P_1P_2}|} \tag{5.3}$$

Egyenesek távolsága: e_1 egyenes v_1 irányvektorral és P_1 ismert ponttal, illetve e_2 egyenes v_2 irányvektorral és P_2 ismert ponttal:

$$d(e_1, e_2) = \frac{|\vec{P_1 P_2} \cdot \left(\underline{v_1} \times \underline{v_2}\right)|}{|\underline{v_1} \times \underline{v_2}|} = \frac{|\vec{P_1 P_2} \cdot \underline{n}|}{|\underline{n}|} \tag{5.4}$$

Sík egyenlete: 3 pontja vagy 1 pontja és normálvektora határozza meg. S sík $\underline{n}$ normálvektorral és ismert $P = (p_1, p_2, p_3)$ ponttal és egy tetszőleges $Q = (x, y, z)$ ponttal:

$$\underline{n} \cdot (\vec{PQ}) = 0 = n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) \tag{5.5}$$

kifejtve a szorzatokat, megkapjuk az általános egyenletet:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{5.6}$$

Sík és pont távolsága: Ismert S sík $\underline{n}$ normálvektora és egy P pontja, ekkor keressük a P_0 pont távolságát a síktól:

$$d(P, S) = \frac{\underline{n} \cdot (\vec{PP_0})}{|\underline{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \tag{5.7}$$

6. Lineáris leképezések

6.1. Definition (Lineáris leképezés). *Az* $\underline{\underline{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *transzformáció lineáris, ha* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ *esetén* $\underline{\underline{A}}(\alpha\, \underline{a} + \beta\, \underline{b}) = \alpha\, \underline{\underline{A}}\, \underline{a} + \beta\, \underline{\underline{A}}\, \underline{b}$

Adott $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ vektort, adott lináris leképezés egy $\underline{r}' \in \mathbb{R}^3$ vektorba képzi le. A lineáris leképezés mátrixát $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jelölve, az $\underline{r}'$ vektor

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{r} = \underline{r}' \tag{6.1}$$

Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ lineáris leképezés mátrixának meghatározásához meg kell vizsgálnunk, hogyan hat egy adott vektor esetén annak bázisára. Példaként a kanonikus bázist tekintve, a bázisvektorok transzformációját a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}\, \underline{i} &= a_{11}\, \underline{i} + a_{21}\, \underline{j} + a_{31}\, \underline{k},\\
\underline{\underline{A}}\, \underline{j} &= a_{12}\, \underline{i} + a_{22}\, \underline{j} + a_{32}\, \underline{k},\\
\underline{\underline{A}}\, \underline{k} &= a_{13}\, \underline{i} + a_{23}\, \underline{j} + a_{33}\, \underline{k},
\end{aligned} \tag{6.2}$$

ahol $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{3} = \underline{\underline{A}}$.

Remark. $\mathbb{R}^2$ esetén, adott lineáris leképezés mátrixa 2×2-es mátrixot jelent, így 9 meghatározandó elem helyett, csupán 4 elemet kell meghatározni.

Ezek alapján egy lineáris leképezés mátrixának hatása egy vektorra ($\underline{r} \in \mathbb{R}^3$) a következőképpen fejezhető ki: legyen $\underline{r} = (x, y, z) \equiv x\, \underline{i} + y\, \underline{j} + z\, \underline{k}$, ekkor felhasználva a bázisvektorokkal felírt definíciót

$$\begin{aligned}
\left(\underline{\underline{A}}\, \underline{r}\right)_i &= \left(x\, \underline{\underline{A}}\, \underline{i} + y\, \underline{\underline{A}}\, \underline{j} + z\, \underline{\underline{A}}\, \underline{k}\right)_i\\
&= (a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)\, \underline{i} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)\, \underline{j} + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)\, \underline{k}\\
&= \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\, r_j
\end{aligned} \tag{6.3}$$

6.1. Example (Mátrix és vektor szorzata).

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{r} = (1, 2, 1)\\
\underline{\underline{A}}\, \underline{r} &= (1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 0\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 2 - 1\cdot 1, 1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1)\\
&= (-1, 1, 0)
\end{aligned}$$

Vetítések, tükrözések vagy forgatások esetén érdemes felbontani a transzformálandó vektort a vetítésvektorra merőleges és párhuzamos komponensére (csakúgy mint a forgatások esetén a forgatás tengelyre merőleges- és párhuzamos komponensekre),

$$\underline{r} = \underline{r}_{\perp} + \underline{r}_{\|}. \tag{6.4}$$

A felbontás során találhatunk olyan komponenst amely a transzformáció során nem változik meg. Ennek kihasználása megkönnyítheti a számaításainkat.

A következőkben $\underline{v}$, $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\underline{r} = (x, y, z)$. $\underline{r}$ vektor $\underline{v}$-re való vetítése során először határozzuk meg előbbi vektor $\underline{v}$-n felmért hosszát, mint

$$\| \underline{r}_{\|} \| = \frac{\underline{v}\, \underline{r}}{\| \underline{v} \|}. \tag{6.5}$$

A vetíteni kívánt vektor iránya párhuzamos a vektorra amire vetítjük azt, így

$$\frac{\underline{r}'}{\| \underline{r}' \|} = \hat{\underline{r}}' \parallel \hat{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{\| \underline{v} \|}. \tag{6.6}$$

Ismerve a vetített vektor hosszát és irányát, azt felírhatjuk

$$\underline{r}' = \frac{\underline{v}\, \underline{r}}{\| \underline{v} \|} \frac{\underline{v}}{\| \underline{v} \|} = \frac{(\underline{v}\, \underline{r})\, \underline{v}}{\| \underline{v} \|^2} = \underline{r}_{\|} \tag{6.7}$$

alakban. Ugyanakkor kihasználhatjuk a fent megjelenő skaláris szorzat azonosságát, miszerint

$$(\underline{a}\, \underline{b})\, \underline{c} = (\, \mathbf{c} \circ \mathbf{a})\, \underline{b}. \tag{6.8}$$

Ezen azonosság segítségével pedig a vetíteni kívánt vektor kiemelhető a (6.7). képletből.

6.1. Exercise (Vetítés vektorra)**.** Legyen $\underline{v} = (1, -1, 2)$ és adjuk meg az erre a vektorra való vetítés lineáris leképezésének mátrixát. A fentiek alapján határozzuk meg a tetszőleges $\underline{r}$ merőleges vetületét és szorozzuk meg a $\underline{v}$-irányába mutató egységvektorral.

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \|v\|^2 = 6 \\ \underline{v}\, \underline{r} &= x - y + 2z \end{aligned}$$

$$\underline{r}' = \frac{1}{6}\,(x - y + 2z,\ -x + y - 2z,\ 2x - 2y + 4z) \tag{6.9}$$

Vegyük most az általános lineáris leképezés mátrix és tetszőleges vektor közötti (6.1). összefüggést és hasonlítsuk össze az általunk kapott vektorral.

A mátrix együtthatói $\underline{r}'$-ra kapott összefüggésből leolvashatóak az általános mátrix-vektor szorzat ismeretében:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

6.2. Exercise (Vetítés síkra)**.** Legyen adott az S sík egy normálvektora $\underline{n} = (2,1,-1)$, $|\,\underline{n}|^2 = 6$, ekkor a normálvektorra merőleges vetületét kell meghatároznunk a tér egy adott $\underline{r} = (x,y,z)$ vektorának. Ekkor bontsuk fel $\underline{r}$-t az $\underline{n}$-re merőleges és az arra párhuzamos komponens összegeként:

$$\underline{r} = \underline{r}_{\|} + \underline{r}_{\perp}, \tag{6.11}$$

ahol $\underline{r}_{\|} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{\|\,\underline{n}\|^2}\,\underline{n}$ egyszerűen az előző példában kiszámított párhuzamos vetület, ekkor egyszerűen a merőleges vetület, vagyis az $\underline{r}$ vektor S síkban tartozkodó része:

$$\begin{aligned} \underline{r}_{\perp} &= \underline{r} - \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{\|\,\underline{n}\|^2}\,\underline{n} \\ &= (x,y,z) - \frac{2x+y-z}{6}(2,1,-1) \\ &= \frac{1}{6}(2x-2y+2z, -2x+5y+z, 2x+y+5z)\,, \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ahonnan a mátrix már könnyen leolvasható:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

6.3. Exercise (Vektorra merőleges komponens meghatározása)**.** Legyen most $\underline{v} = (-1,-1,1)$. Itt ugyanaz a feladatunk, mint ahogy a síkra való vetítésnél az $\underline{n}$ normálvektor esetében eljártunk, vagyis vegyük a tetszőleges $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ vektor $\underline{v}$-ra merőleges és azzal párhuzamos vetület szerinti felbontását:

$$\underline{r} = \underline{r}_{\|} + \underline{r}_{\perp}, \tag{6.14}$$

ahol ismét az első feladat alapján, $\underline{r}_{\|} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\,\underline{v}|^2}\,\underline{v} = \frac{-x-y+z}{3}(-1,-1,1)$, vagyis a merőleges komponens $\underline{r}_{\perp} = \underline{r} - \underline{r}_{\|} = (x,y,z) - \frac{-x-y+z}{3}(-1,-1,1) = \frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y-z, x+y+2z)$, ahonnan a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

6.4. Exercise (Forgatás 2 dimenzióban)**.** Adott φ szöggel való forgatás 2 dimenzióban. Vegyük $\underline{i}$ és $\underline{j}$ bázisvektorokat, ekkor egy tetszőleges vektor forgatása egyenértékű a bázisvektorok forgatásával. Ezek transzformáltja pedig

$$\underline{i}' = \cos(\varphi)\ \underline{i} + \sin(\varphi)\ \underline{j} \tag{6.16}$$

$$\underline{j}' = -\sin(\varphi)\ \underline{i} + \cos(\varphi)\ \underline{j} \tag{6.17}$$

alakban írható fel. Ezen egyenletekből pedig leolvashatjuk a lineáris transzformáció mátrixát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Remark. Most számítsuk ki az inverzét a φ szögű forgatás mátrixának. 2×2-es mátrixok esetén az általános

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

mátrixnak az inverze a következő képpen adható meg:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Innen a forgatás mátrix inverze egyszerűen

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix}, \tag{6.20}$$

vagyis ahogy vártuk, a φ szöggel való forgatás mátrixának inverze nem más mint a $-\varphi$-vel való forgatás mátrixa.

6.5. Exercise (Tükrözés síkra)**.** Hasonlóan járhatunk el, mint amikor a síkra vett vetületet néztük. Felbontjuk a tér egy adott $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát az S sík $\underline{n}$ normálvektorával párhuzamos, illetve arra merőleges komponensére, $\underline{r} = \underline{r}_{||} + \underline{r}_{\perp}$, ahol a fentiek alapján, $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\underline{n}|^2}\underline{n}$. Ekkor a síkra való tükrözés nem változtatja meg a síkkal párhuzamos (a normálvektorra merőleges komponenst), viszont $\underline{r}_{||} \to -\underline{r}_{||}$ módon változtatja meg a normálvektorral párhuzamos (síkra merőleges) komponenst, vagyis összességében:

$$\underline{r}' = \underline{r}_{\perp} - \underline{r}_{||} \equiv \underline{r} - 2\,\underline{r}_{||} = \underline{r} - 2\frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\underline{n}|^2}\underline{n} \tag{6.21}$$

Legyen most $\underline{n} = (1, 0, 1)$, ekkor $\underline{r}_{||} = \frac{x+z}{2}(1, 0, 1)$, vagyis a tükörkép vektor

$$\underline{r}' = (x, y, z) - (x+z)(1, 0, 1) = (-z, y, -x)\,, \tag{6.22}$$

ahonnan a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

6.6. Exercise (Tükrözés vektorra). Ekkor ismét a tér egy tetszőleges $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát felbontjuk az adott $\underline{v}$-vel párhuzamos és az arra merőleges komponense szerint, $\underline{r} = \underline{r}_\perp + \underline{r}_{||}$, ahol ismét a fentiek alapján $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\underline{v}$. Ekkor, mivel most magára a vektorra és nem a vektorra merőleges síkra tükrözünk, a vektorral párhuzamos komponens fog változatlan maradni, és a merőleges komponensnek kell vennünk a mínusz egyszeresét, $\underline{r}_\perp \to -\underline{r}_\perp$, vagyis a transzformáció összességében:

$$\underline{r}' = \underline{r}_{||} - \underline{r}_\perp = 2\,\underline{r}_{||} - \underline{r} = 2\frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\,\underline{v}|^2}\,\underline{v} - \underline{r}. \tag{6.24}$$

Most legyen $\underline{v} \equiv (1, 0, 0)$, ekkor $\underline{r}_{||} = (x, 0, 0)$, vagyis a transzformált vektor, $\underline{r}' \equiv (x, -y, -z)$, ahonnan pedig a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

6.7. Exercise (Forgatás 3 dimenzióban, tetszőleges vektor körül). Ehhez először bontsuk fel a tér egy tetszőleges $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát a forgatási vektorra párhuzamos, $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{n}\cdot\underline{r}}{|\,\underline{n}|^2}\,\underline{n}$, illetve az arra merőleges, $\underline{r}_\perp = \underline{r} - \underline{r}_{||}$ komponensre és vegyük észre, hogy ekkor a párhuzamos komponens változatlan marad! (megjegyzés: utólagosan kicsit megváltoztattam a jelölést ahhoz képest amit órán használtam) Ami a merőleges komponenst illeti, azt egy olyan koordinátarendszerben kell φ szöggel elforgatnunk, amiben az egyik bázisvektor ($\underline{r}_i$) egyszerűen $\underline{r}_\perp$ feleltethető meg (ahol lenomrálhatjuk a nagyságát 1-re, hiszen $|\,\underline{i}| = 1$, ám ekkor a bázis forgatása után ismernünk kell $\underline{r}_\perp$ vektor nagyságát, ami most nem célravezető), illetve a másik bázisvektornak ($\underline{j}$) pedig a $\underline{r}_j \equiv \frac{\underline{n}}{|n|} \times \underline{r}_\perp$ vektorral azonosíthatjuk. (jelen esetben itt a bázis nagysága azonos a tetszőleges vektor ($\underline{r}$) merőleges komponensével ($\underline{r}_\perp$). Ekkor a φ szögű forgatás egyszerűen:

$$\underline{r}'_\perp = \cos(\varphi)\,\underline{r}_i + \sin(\varphi)\,\underline{r}_j \tag{6.26}$$

Mivel a párhumos komponens változatlan marad, a forgatott vektor:

$$\underline{r}' = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\,\underline{n}|^2}\,\underline{n} + \cos(\varphi)\,\underline{r}_i + \sin(\varphi)\,\underline{r}_j \tag{6.27}$$

Ahol az első tag a párhuzamos komponenst a második kettő pedig a merőleges komponenes φ-vel forgatott esete látható.

Legyen $\underline{n} = (1, 0, 1)$ és $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
A szükséges mennyiségek:

$$\underline{r}_\perp = \underline{r} - \frac{\underline{n}\cdot\underline{r}}{|\,\underline{n}|^2}\,\underline{n} = (x, y, z) - \frac{1}{2}(x + z, 0, x + z) = \frac{1}{2}(x - z, 2y, z - x)\,,$$

$$\frac{\underline{n}}{|n|} \times \underline{r}_\perp = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y, x - z, y)$$

Innen a transzformált vektor:

$$\begin{aligned}
\underline{r}' &= \frac{1}{2}(x+z, 0, x+z) \\
&+ \cos(\pi/4)\frac{1}{2}(x-z, 2y, z-x) \\
&+ \sin(\pi/4)\frac{1}{\sqrt{2}}(-y, x-z, y) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(\sqrt{2}+1\right)x - \sqrt{2}y + \left(\sqrt{2}-1\right)z \\ 2y + \sqrt{2}(z-x) \\ \left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{2}y + \left(\sqrt{2}+1\right)z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ahonnan pedig a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}. \tag{6.28}$$

7. Mátrix determináns számítás

7.1. Definition (Mag). *Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix/lineáris leképezés, $\underline{\underline{A}} \in Lin(\mathbb{V}, \mathbb{U})$, $\underline{\underline{A}} : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ magja azon vektorok, melyeket a mátrix a null vektorba viszi:*

$$\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} = \left\{ \underline{v} \in \mathbb{V},\ \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{0} \in \mathbb{U} \right\} \tag{7.1}$$

7.2. Definition (Képtér). *Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix/lineáris leképezés képtere azon vektorok halmaza, amelyeket a $\mathbb{V}$ vektoraiból kapunk, ha hattatjuk rájuk a mátrixot/lineáris leképezést:*

$$\operatorname{Im} \underline{\underline{A}} = \left\{ \underline{\underline{A}}\,\underline{v},\ \underline{v} \in \mathbb{V} \right\} \tag{7.2}$$

7.1. Theorem (Dimenziótétel). $\underline{\underline{A}} \in \operatorname{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$ *esetén* $\dim\mathbb{V} = \dim\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} + \dim\operatorname{Im} \underline{\underline{A}}$.

7.1. Example (Dimenziótétel példa). Legyen $\underline{\underline{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$-ból az x, y síkra való vetítés, azaz

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor a mag, a z irányba mutató vektorok halmaza, hiszen látható, hogy a csak z komponenssel rendelkező vektorok x, y síkra vetítése során a null vektort adják vissza. Más szavakkal, ha $\underline{v} = (0, 0, z)$, akkor $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = (1 \cdot 0, 1 \cdot 0, 0 \cdot z) \equiv (0, 0, 0)$, vagyis a mag $\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$.
A képtér a leírásból is láthatóan minden az x, y síkban lévő vektor, vagyis $\mathbb{R}^2$, hiszen egy tetszőleges vektort véve, $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, azaz $\operatorname{Im} \underline{\underline{A}} = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}^2$.

7.3. Definition (Permutációk). $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *halmaz permutációja, ha σ bijektív leképezés.*

7.2. Example (Permutáció 1.példa). $\sigma\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 1, 4\}$, vagyis $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 4$.

7.3. Example (Permutáció 2.példa). $\sigma\{1, 2, 3\} = \sigma\{3, 1, 2\}$, vagyis $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$, ami éppen egy ciklikus permutációja az $\{1, 2, 3\}$-nak!

7.4. Definition (Inverziók). *Ha $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-ra teljesül, hogy $i < j$ és $\sigma(j) < \sigma(i)$, akkor a két elem inverzióban áll egymással, ekkor $I(\sigma)$ az inverziók száma.*

Permutáció paritása: $(-1)^{I(\sigma)}$, vagyis $+1$, amikor az eredeti sorrend páros sok pár cserével kapható vissza, ezeket nevezzük *páros permutációknak* és -1, ha páratlan sokkal, ezeket pedig *páratlan permutációknak* nevezzük! Három dimenzióban ez éppen megegyezett a ciklikus és a nem ciklikus permutációkkal.

7.4. Example (Inverziók száma 1.példa).

$\sigma\{1,2,3,4\} = \{2,3,1,4\}$. Ekkor megcserélve a 3-ast és 1-est, illetve ezt követően a 2-est és az 1-est visszakapjuk az eredeti halmazt, vagyis páros sok cserére volt szükségünk, azaz $I(\sigma) = 2$, illetve a paritás $(-1)^{I(\sigma)} \equiv +1$.

7.5. Example (Inverziók száma 2.példa). $\sigma\{1,2,3,4,5\} = \{5,1,2,4,3\}$: Először érdemes a végén lévő 3-ast és 4-est megcserélnünk annak érdekében, hogy leszámítva az első 5-öst az elemek egymáshoz vizonyított sorrendje stimmeljen, ekkor az így kapott $\{5,1,2,3,4\}$-ből visszakaphatjuk az eredeti halmazt, ha az 5-öst rendre felcseréljük az 1-essel, a 2-essel, a 3-assal és a 4-essel, ami így összesen 5 párcserét jelent, vagyis $I(\sigma) = 5$, illetve a paritás $(-1)^{I(\sigma)} \equiv -1$.

7.6. Example (Inverziók száma 3.példa).

σ, illetve az inverze σ^{-1}-nek azonos az inverziószámuk és így azonos paritásúak, hiszen ugyanannyi párcsere szükséges a visszarendezéshez, mint az eredeti permutációhoz,

$$\sigma^{-1}\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

7.5. Definition (Determináns). *Az $\underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R})$, vagyis valós értékű $n \times n$-es mátrixok esetén*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

a mátrix determinánsa a következőképpen írható fel:

$$\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} \tag{7.4}$$

Vagyis összegzünk az $\{1, 2, \dots, n\}$ minden permutációjára és az adott permutáció alapján választjuk ki az adott sorokból az elemeket. Az így kapott szorzatot az adott permutáció pariásával súlyozzuk.

2x2-es mátrixok esetén két lehetséges permutációnk van, a $\sigma_1\{1,2\} = \{1,2\}$, az identitás, nulla párcserével és így $(-1)^{I(\sigma_1)} \equiv +1$ paritással, illetve az egyetlen nem triviális permutáció, $\sigma_2\{1,2\} = \{2,1\}$, ahol egyetlen párcserét végeztünk el, vagyis a paritás $(-1)^{I(\sigma_2)} \equiv -1$.

Alkalamzva a definíciót:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= (-1)^{I(\sigma_1)} a_{1\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} + (-1)^{I(\sigma_2)} a_{1\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

ami épp a korábbiakban bevezetett definícióval egyező eredményt adja vissza!

Mátrix determináns néhány tulajdonsága:

- Mátrix transzponáltjának determinánsa a mátrix determinánsával megegyezik: $\left[\underline{\underline{A}}^T\right]_{i,j} = \left[\underline{\underline{A}}\right]_{j,i}$,

$$\det\left(\underline{\underline{A}}^T\right) = \det\left(\underline{\underline{A}}\right). \tag{7.5}$$

- Ha egy mátrix két sora, vagy oszlopa azonos, akkor a determináns nulla, $a_{i,k} = a_{i,j}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq j$ vagy $a_{k,i} = a_{j,i}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq j \rightarrow \det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 0$.
- Oszlopok avagy sorok cseréje megváltoztatja a determináns előjelét!
- Ha egy sor vagy oszlop csupa nulla, akkor a determináns zérus, $a_{i,k} = 0$ vagy $a_{k,i} = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots \rightarrow \det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 0$.
- Egy sor vagy oszlop λ-szorosát vesszük a mátrix determinánsa is λ-szorosára nő.
- Sorok és oszlopok egymás között lineár kombinálhatóak, anélkül, hogy változna a determináns. Vagyis bármelyik sor tetszőleges számszorosát hozzáadhatjuk egy másik sorhoz és a determináns nem fog megváltozni.
- Alsó/Felső háromszög mátrixok determinánsa a diagonális elemek szorzata.

7.1. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

Mivel ez egy felsőháromszög mátrix a determinánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$.

7.2. Exercise. Felhasználva azt a szabályt, hogy ha egy mátrix sorában vagy oszlopában minden elem zérus, akkor a determináns értéke is azonosan nulla, érdemes speciális egyszerű esetekben megpróbálni egyes sorokat/oszlopokat kinullázni egy másik sor vagy oszlop hozzáadásával:
Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Látható, hogy ha levonjuk az első sort a másodikból, illetve hozzáadjuk a harmadik sort a másodikhoz, akkor éppen kinulláztuk annak minden elemét, vagyis ez a determináns zérus, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) \equiv 0$!

7.3. Exercise. Felhasználva, a háromszög mátrixoknál tanult tulajdonságokat, illetve azt a az azonosságot, hogy bármely két sor/oszlop cseréje nyomán a determináns előjelet vált, tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Látható, hogy ha megcseréljük először a második és a hamradik sort $2 \leftrightarrow 3$, majd a harmadikat és a negyediket $3 \leftrightarrow 4$, akkor éppen következő felső háromszög mátrixra jutunk:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

aminek a determinánsa egyszerűen az átlós elemek szorzata, vagyis $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Itt két cserét végeztünk el, ami így egy $(-1)^2 = 1$-es szorzót jelentett.

7.4. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

Adjuk hozzá a 4. sor $-\frac{1}{2}$-szeresét a 2. sorhoz, ezzel kinulláztuk a 2. sor utolsó elemét:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 7/2 & 4 & 3/2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Így a harmadik sorral kinullázhatjuk a 2. sor 3. elemét és az 1. sor 3. elemét, ahonnan

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 5/2 & 0 & 0 \\ 23/4 & 13/4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Most kinullázhatjuk a 2. sor $-10/13$-szorosával az 1. sor 2. elemét:

$$\begin{bmatrix} -152/52 & 0 & 0 & 0 \\ 23/4 & 13/4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

Aminek a determinánsa csak a főátlóban lévő elemek szorzata, vagyis $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = -152/52 \cdot 13/4 \cdot (-2) \cdot 2 = 38$.

7.5. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

Látható, hogy az első oszlop 2., 3. és 4. sora rögtön kinullázható, ha levonjuk belőlük az első sor elemeit, ekkor a következő mátrix adódik:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Most vonjuk ki a második sor 2-eresét a 3.-ból, illetve a 3-orosát a 4. sorból, amiből

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez már egy felső háromszög mátrix, amin rögtön látszik, hogy a determinánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

7.6. Exercise. Számítsuk a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Hozzuk felső hárosmzög alakra, ehhez először ismét az 1. oszlop 2., 3. és 4. sorának elemeit nullázzuk ki az 1. sor segítségével, vagyis vonjuk ki a megfelelő sorokból az első sor 2, 3 és 4-szeresét, ahonnan

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{bmatrix}$$

Most vonjuk ki a 2. sor 2, illetve 7 -szeresét a 3., illetve a 4. sorból, ekkor a következő mátrix adódik:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{bmatrix}$$

Ezt követően adjuk hozzá a 3. sort a 4.-hez, ahonnan már egy felső háromszög mátrix adódik

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

aminek a determinánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160$.

Kifejtési tétel: Előjeles aldetermináns: $A_{i,j}$ úgy kapható meg, hogy kivesszük az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i-ik sorát és j-edik oszlopát és vesszük az így létrejövő $\underline{\underline{\tilde{A}}}_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, $n-1 \times n-1$-es mátrix determinánsát$\times(-1)^{i+j}$. Ekkor a mátrix detrminánsa előáll a következő módon, ha egy tetszőleges $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$-adik *oszlop szerint fejtjük ki*

$$\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k} \tag{7.15}$$

Illetve az $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sor szerinti kifejtés segítségével:

$$\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k} \tag{7.16}$$

7.7. Exercise. A kifejtési tétellel egyszerűen visszakapható a 2×2-es mátrixok determinánsának képlete egy tetszőleges

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

.

Triviálisan az (i,j)-ik aldetermináns egyszerűen az az egy elem, amit nem zártunk ki$\times(-1)^{i+j}$. Vagyis $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$, most fejtsük ki az első sor zerint vagyis

$$\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a \cdot d + b \cdot (-c) \equiv ad - bc$$

7.8. Exercise. Mutassuk meg a kifejtési tétel segítségével, hogy a 3×3-as mátrixok determinánsának "varázs képlete" visszakapható a kifejtési tétel és a 2×2 mátrixok determinánsának ismeretében, legyen a mátrix átlalánosan:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Fejtsük ki most az első sor szerint ismét, ekkor a három megfelelő aldetermináns:

$$A_{11} = \det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} = ei - fh,\ A_{12} = -\det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} = fg - di,\ A_{13} = \det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} = dh - eg.$$

Ekkor a 3×3-as determináns a kifejtsi szabály alapján:

$$\begin{aligned}\det\left(\underline{\underline{A}}\right) &= aA_{11} + bA_{12} + cA_{13} \\ &= a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg) \\ &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.\end{aligned}$$

7.9. Exercise. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

Fejtsük ki az első sor alapján, ugye ekkor csak azt az aldeterminánst kell tekintenünk, amikor az 1. sort és a 2. oszlopot vesszük ki, ekkor a fentmaradó aldetermináns:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+2} \det\left(\underline{\underline{\tilde{A}}}_{12}\right), \tag{7.18}$$

ahol

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.19}$$

aminek a determinánsa a 3×3-as esetben tanultak alapján egyszerűen $\det\left(\underline{\underline{\tilde{A}}}_{12}\right) = 30$, ahonnan összességében az eredeti mátrix determinánsa $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = -\det\left(\underline{\underline{\tilde{A}}}_{12}\right) = -30$.

7.10. Exercise. Számítsuk ki a kifejtési tétel segítségével a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy ha a harmadik sor szerint fejtjük ki a mátrixot, egyszerűen csak egy előjeles aldeterminánst kell kiszámolnunk,

$$A_{32} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -(12 - 1 + 8 - 8 - 2 + 6) = -15,$$

vagyis a teljes determináns $\underline{\underline{A}}A = 2A_{32} = -30$.

7.11. Exercise. Határozzuk meg kifejtési tétel segítségével a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Fejtsük ki ismét azon oszlop/sor szerint, mely a legtöbb 0-át tartalmaz, ekkor érdemes a 3. oszlop szerint kifejteni. Ekkor csak két előjeles aldeterminánst kell kiszámítanunk, A_{33}, A_{43}:

$$\begin{aligned}
A_{33} &= (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -3 - 6 + 6 - 8 + 1 + 18 = 8, \\
A_{43} &= (-1)^{4+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -(-2 - 9 + 16 + 12 + 2 + 12) = -31,
\end{aligned}$$

ahonnan a teljes determináns egyszerűen $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot A_{33} + (-1) \cdot A_{43} = 8 + 31 = 39$.

8. Mátrix Inverz számítás

Definíció(inverz mátrix) Az $n \times n$-es valós $\underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix inverze $\underline{\underline{A}}^{-1}$, amire telejsül, hogy $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$, ahol $\left(\underline{\underline{1}}\right)_{ij} = \delta_{ij}$.
Kiszámítása:

$$\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{\det\left(\underline{\underline{A}}\right)} adj(A)_{ij}, \tag{8.1}$$

ahol $adj(A)_{ij}$ a j-edik sor és az i-edik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsa $\times(-1)^{j+i}$.

8.1. Exercise. Diagonális mátrix inverze az a mátrix, mely szintén diagonális egyszerűen a főátlóban lévő elemek reciprokával, vagyis legyen most 3×3-as esetben

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

ekkor az inverz mátrix egyszerűen

$$\left(\underline{\underline{A}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix}.$$

8.2. Exercise. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

A determináns egyszerűen $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = ad - bc$, illetve az előjeles aldeterminánsok rendre $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$. Vagyis az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

8.3. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A fentiek alapján ekkor az inverz mátrix (a determináns $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 3 - 7 = -4$):

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & \sqrt{3} - 2 \\ -2 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

8.4. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det(\underline{\underline{A}}) = 4+4+3 = 11$. Illetve az előjeels aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix} = 4,\ A_{12} = -\det\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix} = 2,\ A_{13} = \det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = -1$$
$$A_{21} = -\det\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix} = -8,\ A_{22} = \det\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix} = 7,\ A_{23} = -\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} = 2$$
$$A_{31} = \det\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix} = 7,\ A_{32} = -\det\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix} = 7,\ A_{33} = \det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} = -2.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & -8 & 7\\ 2 & 7 & 7\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

8.5. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det(\underline{\underline{A}}) = 6+6 = 12$. Illetve az előjeles aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix} = -9,\ A_{12} = -\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix} = 6,\ A_{13} = \det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} = 3$$
$$A_{21} = -\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix} = 6,\ A_{22} = \det\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix} = -4,\ A_{23} = -\det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix} = 2$$
$$A_{31} = \det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} = 3,\ A_{32} = -\det\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} = 2,\ A_{33} = \det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = -1.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix}-9 & 6 & 6\\ 6 & -4 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

8.6. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix}1 & i & 1+i\\ -i & 1 & 0\\ 1-i & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det(\underline{\underline{A}}) = 1-(1+i)(1-i)+i^2 = -2$. Illetve az előjeles aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ A_{12} = -\det \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} = i,\ A_{13} = \det \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = i-1$$

$$A_{21} = -\det \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -i,\ A_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} = -1,\ A_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = -1-i$$

$$A_{31} = \det \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1-i,\ A_{32} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = 2,\ A_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & -1 & 2 \\ i-1 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$$

9. Gauss elimináció

9.1. Gauss-elimináció egyenletrendszerek megoldására

A következőkben lineáris egyenletrendszerek megoldására fogjuk alkalmazni a Gauss-eliminációt. Tekintsük példaként a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x - 2y + z &= 3 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásának a menete a következő lépésekből áll:

1. **Mátrix megalkotása:** Először írjuk fel az együtthatókat mint egy 3×3-as mátrixot, majd vegyük hozzá 4. oszlopként az egyes egyenletek értékét, vagyis
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$
Ekkor az adott soroknak vehetjük a *lineáris kombinációjukat*, amivel az egyenletrendszer ekvivalens marad, hiszen csak az egyenleteket adtuk össze, illetve vettük azok adott számszorosát. Célunk, hogy addig alakítsuk a sorokat míg a végén a 3×3-as részt az egységmátrix alakjára hozzuk[5], ekkor nyomon követve az utolsó oszlopban található értékek változását a három változó értéke éppen azokkal fog megegyezni.

2. **Mátrix sorainak alakítása:** Először adjuk hozzá az 1. sor -2-szeresét a 2. sorhoz, illetve -1-szeresét a 3. sorhoz, amivel kimulláztuk a 2. és 3. sor első elemeit:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right]$$
Most nullázzuk ki a 3. sor 2. elemét, vagyis levonjuk a 2. sor $1/3$-szorosát a 3. sorból:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -1/3 & -4/3 \end{array}\right]$$

[5] A sorok lineárkombinációja során minden lépésben értelmezhetjük a mátrix elemeit mint egyenletrendszert, így a megoldást akkor is leolvashatjuk ha a mátrix minden sora csak egy nullától különböző elemet tartalmaz.

Most visszafele haladunk és kinulázzuk a felső háromszög részben maradt nem nulla elemeket, ehhez először hozzáadjuk a 3. sor 21-szeresét a 2. sorhoz, illetve a -9-szeresét az 1. sorhoz, ami után

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -6 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & -1/3 & -4/3 \end{array}\right]$$

utolsó lépésként pedig adjuk hozzá a 2. sor 1/3-szorosát az 1. sorhoz, illetve vegyük a 2. sor $-1/6$-szorosát és a 3. sor -3-szorosát, ahonnan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 5.5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

3. **Megoldások leolvasása:** Ez egyértelműen mutatja, hogy $x = -19$, $y = 5.5$, $z = 4$.

9.1. Exercise. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 6 \\ 7x + 8y &= 9. \end{aligned}$$

Ennek megfelelő mátrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

$-7/4 \times$ 1.sor+2. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3/4 & -3/2 \end{array}\right]$$

$20/3 \times$ 2. sor+1. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -3/4 & -3/2 \end{array}\right]$$

ahonnan $x = -1$, $y = 2$.

9.2. Exercise. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 5z &= 6 \\ 7x + 8y + 8z &= 10 \end{aligned}$$

A megfelelő mátrixos alak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 10 \end{array}\right]$$

$-4 \times 1.$ sor$+2.$ sor, illetve $-7 \times 1.$ sor$+3.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & -11 \end{array}\right]$$

$-1 \times 2.$ sor$+3.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$-1 \times 3.$ sor$+2.$ sor, illetve $2/3 \times 3.$ sor$+1.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$-1 \times 2.$ sor$+1.$ sor, illetve $-3/5 \times 3.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right]$$

vagyis $x = -11/3$, $y = -4$, $z = 5/3$.

9.3. Exercise. Mutassuk meg a következő egyenletrendszerről, hogy bár több egyenletünk van, mint ismeretlenünk mégis egyértelműen megoldható!

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ -2x + y &= 2 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

A mátrixos alak:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$2 \times 1.$ sor + 2. sor és $-1 \times 1.$ sor + 3. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

Most $1 \times 2.$ sor + 3. sor, ahonnan látható, hogy a harmadik sor csupa nullából fog állni, ami így nem képez tiltott sort, vagyis elhagyhatjuk és elegendő csupán az első két sort vizsgálnunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$-3/5 \times 2.$ sor + 1. sor, illetve ezt követően 2. sor $\rightarrow -1/5 \times 2.$ sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ahonnan a megoldás már egyértelmű: $x = -7/5$, $y = -4/5$.

9.2. Gauss-elimináció mátrixok invertálására

Hasonlóan működik mint a lineáris egyenletrendszerek megoldása esetében, azonban itt az invertálandó mátrix mellé nem csak egy *eredmény* vektort veszünk, hanem n-et ahol az i-edik oszlopban csak az i-edik tag nem nulla, ezen elem értéke 1, vagyis a megfelelő méretű egységmátrixot.

9.4. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ekkor kiegészítjük még jobb oldalról a 3×3-as egységmátrixszal és a sorok megfelelő lineáris kombinációjával megpróbáljuk 3×3-as egységmátrix alakra hozni a bal oldali mátrixot, ekkor a jobb oldalon kialakuló mátrix adja meg az inverz mátrixot!

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$-4 \times 1.$ sor $+2.$ sor, 1. sor+3. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$2/3 \times 2.$ sor+3. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -5/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right]$$

$-6 \times 3.$ sor+2. sor, $-5/2 \times 3.$ sor+1. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -5/2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -5/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right]$$

Végül mindegyik sort szorozzuk meg úgy, hogy az egységmátrixot kapjuk meg:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 1/3 & 1 \end{array}\right].$$

Ekkor az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverzét a jobb oldalon leolvashatjuk.

9.5. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$-1 \times 1.$ sor $+ 3.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$-4 \times 2.$ sor $+ 3.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$1/2 \times 3.$ sor $+ -1 \times 3.$ sor $+ 1.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

2. sor + 1. sor, illetve azért, hogy megkapjuk baloldalt az egységmátrixot, $3 \to 1/2 \times 3.$ sor, $1 \to 1/4 \times 1.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & 3/4 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

vagyis az inverz mátrix:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & 3/4 & -1/8 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

9.6. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Látszik, hogy itt a "szokásosnál" jóval könnyebb dolgunk van, hiszen egy felső háromszög mátrixot kell csak invertálnunk! $2 \times 3.$ sor $+ 2.$ sor és $-7 \times 3.$ sor $+ 1.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$2 \times 2.$ sor $+ 1.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

vagyis az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Sajátértékek és sajátvektorok

10.1. Definition (Sajátérték, sajátvektor). *az* $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ *mátrix* $\underline{v} \in \mathbb{V}$ *sajátvektorához tartozó sajátértéke,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *vagy* $\mathbb{R}$*, ha*

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}, \;\; \underline{v} \neq \underline{0}. \tag{10.1}$$

Sajátérték meghatározsása: A karakterisztikus egyenlet,

$$\det\big(\,\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = 0, \tag{10.2}$$

megoldásai szolgáltatják, majd az adott λ_i *sajátértékhez tartozó sajátvektort a*

$$\big(\,\underline{\underline{A}} - \lambda_i\mathbb{I}\big)\;\underline{v}_i = 0 \tag{10.3}$$

egyenlet alapján határozhatjuk meg.

10.1. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátvektorait és sajátértékeit:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \det\big(\,\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = &\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ = &(3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = 0 \end{aligned}$$

$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \to \lambda_{1,2} = 5/2 \pm \sqrt{25/4 + 14} = 5/2 \pm 9/2 \to \lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2.$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_1 : \;\; \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Bár ez két egyenlet, de ezek *ekvivalensek* egymással, azaz csak a két komponens között adnak egy összefüggést, az első komponensből származó egyenlet alapján $x = y$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t(1,1)$, ahol $t \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám, ezt nevezzük az sajátvektor által kifeszített altérnek!
A második sajátvektor:

$$\lambda_2 : \;\; \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \to 5x = 4y \to y = 5/4x$$

Innen a második sajátvektor: $\underline{v}_2 = t(1, 5/4)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.2. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátvektorait és sajátértékeit:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2i \\ 2i & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \to \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5.$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_1 : \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ismét csak egy összefüggés adódik a két komponens között, ami a fentebbi egyenlet alapján $x = 2iy$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t(2i, 1)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
A második sajátvektor:

$$\lambda_2 : \begin{bmatrix} -4 & -2i \\ 2i & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \to x = -i/2y$$

Innen a keresett sajátvektor: $\underline{v}_2 = t(i/2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.3. Exercise. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy az alábbi mátrix sajátvektorai ortogonálisak legyenek egymásra:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = \frac{1}{3}\det\left(\begin{bmatrix} 1-3\lambda & p \\ -1 & 1-3\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-3\lambda)(1-3\lambda) - p = 0$$
$$1 - 3\lambda = \pm\sqrt{p} \to \lambda_\pm = \frac{1 \mp \sqrt{p}}{3}$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_+ : \begin{bmatrix} \sqrt{p} & p \\ 1 & \sqrt{p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Az összefüggés a komponensek között az első egyenlet alapján $-\sqrt{p}x = y$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t\big(1, -\sqrt{p}\big)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
A második sajátvektor ugyanaz lesz mint az első csak most a $-\sqrt{p}$ értékkel: $\underline{v}_2 = t\big(1, \sqrt{p}\big)$. A két sajátvektor ortogonális, ha $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1 - p = 0 \to p = 1$.

10.4. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\right) = \det&\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7-3\lambda & 2i & 0 \\ 2i & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-3\lambda \end{bmatrix}\right) \\ =& \frac{1}{27}(7-3\lambda)(2-3\lambda)(9-3\lambda) + \frac{4}{27}(9-3\lambda) \\ =& (3-\lambda)((7-3\lambda)(2-3\lambda)+4) = 0 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek egy megoldása biztosan a $\lambda_1 = 3$ a szorzat első tagja alapján, a másik kettőt pedig az $(7-3\lambda)(2-3\lambda)+4 = 9\lambda^2 - 27\lambda + 18 = (3\lambda - 6)(3\lambda - 3) = 0$ másodfokú egyenlet szolgáltatja, ahonnan $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$.
Innen a sajátvektorok rendre:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Látható, hogy a z komponensre nem kapunk összefüggést, vagyis annak értéke tetszőleges, ez paraméterezi a sajátvektort, míg az x, y komponensre egyértelmű eredményt kapunk az első egyenlet alapján: $x = iy$, illetve a második egyenlet alapján $x = -7iy \to x = 7x \to x = 0, y = 0$.
Innen $\underline{v}_1 = t(0, 0, 1)$, $t \in \mathbb{C}$.

$$\lambda_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 2i & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

A harmadik komponensre vonatkozó egyenlet alapján $z = 0$, illetve ekkor az első két egyenlet ekvivalens lesz egymással és csak az első két komponens közötti összefüggést adja meg, vegyük most az első egyenletet, $x = -2iy$, látható, hogy ez a második egyenletet is kielégíti!
Innen a második sajátvektor $\underline{v}_2 = t(-2i, 1, 0)$, $t \in \mathbb{C}$.

$$\lambda_3 : \quad \begin{bmatrix} 4 & 2i & 0 \\ 2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ismét a harmadik komponensre vonatkozó egyenlet alapján $z = 0$ és így az első két egyenlet az x, y komponensek közötti összefüggést adja meg, hagyva egy szabad paramétert. Az első komponensre vonatkozó egyenlet alapján $y = 2ix$, látható, hogy ez kielégíti a második egyenletet is! Innen a harmadik sajátvektor $\underline{v}_3 = t(1, 2i, 0)$, $t \in \mathbb{C}$.

10.5. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (4-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)\left((4-\lambda)(4-\lambda) - 1\right) = 0$$

Ennek az egyenletnek egy megoldása biztosan a $\lambda_1 = 2$ a szorzat első tagja alapján, a másik kettőt pedig a $(4-\lambda)^2 - 1 = 0$ egyenletből kaphatjuk meg, ahonnan $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$.
Innen a sajátvektorok rendre:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ismét csak két egyenletet kell megoldanunk, hiszen a második komponensre felírandó egyenlet triviális, csupa nulla együtthatókkal! Az első és harmadik komponensre felírt egyenletek alapján:

$$\begin{aligned} &2x = -4y - z \\ &x + 2y + 2z = 0 \to= z = 0,\ x = -2y \end{aligned}$$

Innen $\underline{v}_1 = t(-2, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ahonnan ismét az első kettő egyenlet szolgáltatja az összefüggést a három komponens között:

$$\begin{aligned} &x + z = 0 \to x = -z \\ &y = 0 \end{aligned}$$

Innen a második sajátvektor $\underline{v}_2 = t(1, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_3 : \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ahol ismét először kihasználjuk, hogy a második egyenlet alapján $y = 0$:

$$\begin{aligned}
&-x + 4y + z = 0 \\
&y = 0 \rightarrow x = z \\
&x - z = 0
\end{aligned}$$

Innen a második sajátvektor $\underline{v}_3 = t(1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.1. Diagonális mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Diagonális mátrixoknál korábban láttuk, hogy azok determinánsa a diagonális elemek szorzatával egyenlő. Ennek okán a karakterisztikus sajátérték egyenlet felírásakor

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$$

szorzatot kapjuk, ahol a_{ii} az $\underline{\underline{A}}$ mátrix diagonális elemeit jelöli.

10.1. Example. 1. Adott a következő mátrixunk

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}. \tag{10.4}$$

Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = (7 - \lambda)(9 - \lambda)(11 - \lambda) = 0 \tag{10.5}$$

egyenletből rögtön leolvasható a karakterisztikus egyenlet három gyöke: $\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = 11.$

A mátrix alakjából azonnal látszik, hogy milyen szerkezetűek lesznek a sajátvektorok:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.6}$$

Ebből a következő három egyenlet adódik

$$\begin{aligned}
0x + 0y + 0z &= 0 \\
2y &= 0 \\
4z &= 0
\end{aligned}$$

Látható, hogy ez bármilyen x esetén teljesül a $y = 0$ és $z = 0$ megkötés mellett. Így a normált, első sajátértékhez tartozó sajátvektor a

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

Látható, hogy felírva a második és harmadik sajátértékhez tartozó egyenleteket alakra ugyan ilyen egyenleteket kapunk. Így a maradék két sajátvektort (normálva) a következő alakban írhatjuk fel:

$$v_2 = (0, 1, 0)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

10.2. Felső és alsó △ mátrixok

Felső és alsó háromszög mátrixok esetén azok determinánsának kiszámítása ugyan úgy zajlik mint a diagonális mátrixok esetén , tehát a főátlóbeli elemek szorzata adja azt.

10.2. Example.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \text{(kifejtve az első oszlop szerint)} \to \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\right) = (1-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) = 0 \tag{10.7}$$

Ismételten a sajátértékeket leolvashatjuk a főátlóból: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 2$. A sajátvektorok esetén - ha azokat a főtálóban fentről lefelé indexeltük meg - azt találjuk *általánosan*, hogy az elsőnek egy eleme különbözik nullától, a másodiknak kettő és a harmadiknak mindhárom eleme véges lesz.

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned} 0x + 2y + 3z = 0 \qquad & \to y = -3/2z, \quad x \in \mathbb{R} \\ 0x + 4y + 3z = 0 \qquad & \to y = 0 \\ 0x + 0y + 1z = 0 \qquad & \to z = 0 \end{aligned}$$

Az első, normált sajátvektor tehát:

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

$$\lambda_2 = 5: \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned} -4x + 2y + 3z = 0 \qquad & \to y = 2x \\ 0x + 0y + 3z = 0 \qquad & \to z = 0 \\ 0x + 0y + -3z = 0 \qquad & \to z = 0 \end{aligned}$$

legyen $x = 1$. Ekkor $y = 2$, az egyenletek alapján pedig $z = 0$, tehát a sajátvektor.

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}}(1, 2, 0)$$

$$\lambda_3 = 2 : \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.10}$$

$$\begin{aligned} -1x + 2y + 3z &= 0 \qquad && \to x = -y \\ 0x + 3y + 3z &= 0 && \to y = -z \\ 0x + 0y + 0z &= 0 && \to z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Itt pedig a sajátvketor mindhárom eleme nullától különbözőnek adódott:

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1}}(1, -1, 1)$$

Transzponált mátrixok sajátértékei Itt érdemes megjegyezni, hogy egy mátrix transzponáltjának sajátértékei megegyeznek a nem transzponált mátrix értékeivel.

10.3. Example (Felső hármoszögmátrix transzponáltja)**.** Az előző példában szereplő felső háromszögmátrix transzponáltja egy alsó háromszögmátrixot ad, melynek főátlójában az elemek nem változnak meg, így sajátértékeik megegyeznek.

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{10.11}$$

10.3. Inverz mátrixok

Ha egy mátrix invertálható, tehát zérustól különböző a determinánsa, akkor azon mátrix sajátértékei megegyeznek az eredeti mátrix sajátértékeinek reciprokával, amellett, hogy sajátvektorai nem változnak meg.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}\,\underline{v} &= \lambda \underline{v} \quad \text{Szorozzuk meg mindkét oldalt a mátrix inverzével balról(} \underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \text{)} \\ \mathbb{I}\underline{v} &= \lambda\, \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{v} \\ \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{v} &= \frac{1}{\lambda} \underline{v} \end{aligned}$$

Legegyszerűbb példa erre egy diagonális mátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \to \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{bmatrix}$$

Sajátérvektorai pedig változatlanok maradtak.

Kevésbé triviális példa: Legyen a mátrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus egyenlete: $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$, melynek két megoldása : $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$. Az ezekhez tartozó sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 1 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.12}$$

Ez az $x = -y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

$$\lambda_1 = 1 : \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.13}$$

Ez az $x = y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

Most invertáljuk a mátrixot és végezzük el ugyanezen lépéseket.

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$9\lambda^2 - 12\lambda + 3 = 0 \quad \rightarrow \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 * 3 * 9}}{18} = \frac{12 \pm 6}{18} = 1 \text{ és } 1/3$$

$$\lambda_1 = 1 : \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.14}$$

Ez az $x = y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

$$\lambda_2 = 1/3 : \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.15}$$

Ez az $x = -y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

11. Spectrálfelbontás és diagonalizáció

Egy $\underline{\underline{A}}$ diagonalizálható ha létezik olyan $\underline{\underline{P}}$ és $\underline{\underline{P}}^{-1}$ mátrixok melyekre teljesül, hogy

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1},$$

ahol 'D' egy diagonális mátrix melynek főátlójában az 'A' mátrix sajátértékei találhatóak, a 'P' mátrix pedig az 'A' mátrix sajátvektorait tartalmazza. Elégséges feltétele a diagonalizációnak az, hogy egy $n \times n$ mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van.

11.1. Example. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus polinomja:

$$0 = -6 - 3\lambda + \lambda^2$$

Ennek leolvashatjuk a megoldásait, amik $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 4$. Ezek ismeretében a 'D' mátrixot a következő alakban írhatjuk fel:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

Most a sajátvektorokból megalkotjuk a 'P' mátrixot:

$$\lambda_1 = 1: \qquad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

$$\lambda_2 = 3: \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Ezek ismeretében a 'P' mátrix - a normálási faktorokat itt most elhagyom:

$$\underline{\underline{P}} = (\vec{v_1}\,\vec{v_2}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P}}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Ennek ellenőrzésére:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \tag{11.5}$$

megoldásával történik.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \\ &= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

alternatívaként:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \quad \text{szorozzuk meg 'P' vel jobbról} \\
\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}(I) \quad \text{szorozzuk meg 'P' inverzével balról} \\
\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \mathbb{I}\,\underline{\underline{D}}\mathbb{I} \\
\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{D}}
\end{aligned}$$

A fent említett elégséges feltétel láthatóan nem teljesül tetszőleges mátrixokra. Például egy diagonális mátrix melynek nem mindegyik eleme különbözik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrixnak sajátértékei: $1, 2$ és 1, tehát 'D' mátrix megegyezik a diagonalizálandó mátrixxal. A 'P' mátrixok pedig a standard bázisvektorokból épül fel, tehát az $n \times n$ dimenziós egységmátrixxal egyeznek meg.

Ha példaként a

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot vesszük, akkor láthatjuk, hogy sajátértéke degenerált, tehát $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, amikkel ha meghatározzuk a sajátvektorokat (és normáljuk azokat) akkor $v_1 = v_2 = (1, 0)$ vektorokat kapjuk. Nincs két független báziselem, 'P' nem invertálható, így nem tudjuk diagonalizálni a mátrixot.

11.0.1. Mátrix függvények

Ha meg akarjuk határozni egy mátrix egy tetszőleges hatványát, akkor a diagonalizált mátrix felírás megkönnyítheti a dolgunkat. Legyen a mátrixunk most $\underline{\underline{X}}$. Feltéve, hogy X diagonalizálható felírhatjuk azt

$$X = PDP^{-1} \tag{11.6}$$

$$f(X) = X^n \tag{11.7}$$

Legyen most $n = 2$:

$$f(X) = XX = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\mathbb{I}DP^{-1} = PD^2P^{-1} \tag{11.8}$$

Láthatjuk, hogy csak a diagonális résszel kell elvégeznünk a négyzetre emelést, ami annak elemei négyzetre emelésével megkapható. Innen $n = 3$ ugyan így következik:

$$X^3 = X^2X = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2\mathbb{I}DP^{-1} = PD^3P^{-1} \tag{11.9}$$

tetszőleges n esetére pedig:

$$f(X) = PD^n P^{-1} \tag{11.10}$$

Másik példaként ha $\exp(X)$-re lennénk kiváncsiak, akkor definíció szerint:

$$\exp(X) := \sum_{k=0}^{\text{inf}} \frac{1}{k!} X^k \tag{11.11}$$

X helyére beírva annak spektrálfelbontását:

$$\exp\left(PDP^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{\text{inf}} \frac{1}{k!} (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\text{inf}} \frac{1}{k!} PD^k P^{-1} = P \exp(D) P^{-1} \tag{11.12}$$

legyen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ekkor

$$\exp(D) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^7 \end{bmatrix}$$

12. Taylor sorfejtés

Taylor sornak nevezzük azt a végtelen sort, mely egy valós (vagy komplex) függvény adott pontban meghatározott derivált értékekből állítja elő a függvényt. Legyen $f(x)$ egy valós vagy komplex, differenciálható és folytonos függvény. Ekkor ennek Taylor sora

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \tag{12.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{12.2}$$

ahol a egy tetszőleges pont[6] ahol értelmezhető az $f(x)$ függvény és deriváltja, továbbá $f^{(n)}(x)$ a függvény n-ik derivátját jelöli.

Láthatjuk ha az összegzést csak véges számú derivált értékre végezük el, hogy azok egy polinom formályában közelítik a függvényt

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k \tag{12.3}$$

12.1. Alapvető Taylor sorok

12.1. Example $(\sin(x))$**.** Határozzuk meg $\sin(x)$ deriváltjait, helyettesítsük be a pontot ami körül sorbafejtjük a függvényt végül alkalmazzuk a fenti Taylor sor összefüggését.

$$\frac{\mathrm{d}\,\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \tag{12.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \tag{12.5}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\,\sin(x)}{\mathrm{d}x} = -\cos(x) \tag{12.6}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\,\cos(x)}{\mathrm{d}x} = \sin(x). \tag{12.7}$$

[6]Ha $a = 0$, akkor szokás a Taylor sort Maclaurin sornak is nevezni

Mivel $\sin(0) = 0$ és $\cos(0) = 1$, láthatjuk, hogy a Taylor sor bizonyos tagjai nullát adnak majd. Felírva a definíciót

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \dots \tag{12.8}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{12.9}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{12.10}$$

12.2. Example ($\cos(x)$)**.** Hasonlóan az előző példához, könnyen felírhatjuk $\cos(x)$ taylor sorát is $a = 0$ körül

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{12.11}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{12.12}$$

12.3. Example (e^x)**.**

$$e^x = e^a \left((x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \right) \tag{12.13}$$

$$= 1 \left((x) + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \dots \right) \tag{12.14}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{12.15}$$

12.4. Example ($\ln(x)$)**.**

$$\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\mathrm{d}^2\ln(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-1}{x^2}; \quad \frac{\mathrm{d}^3\ln(x)}{\mathrm{d}x^3} = \frac{-2}{x^3} \tag{12.16}$$

Válasszuk most a tetszőleges pontot $a = 1$-nek.

$$\ln(x) = \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2!}\frac{-1}{1^2}(x-1)^2 + \dots \tag{12.17}$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-3)^3 + \dots \tag{12.18}$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} \tag{12.19}$$

12.5. Example ($\ln(1-x)$ és $\ln(1+x)$)**.**

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \tag{12.20}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \tag{12.21}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \tag{12.22}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \tag{12.23}$$

12.1. Exercise $(\ln(2+cos(x)))$**.** Határozzuk meg a fenti függvény Taylor sorát másod rendig $a = 0$ körül.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(2+\cos(x)) = \frac{1}{2+\cos(x)}(-\sin(x)) \tag{12.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln(2+\cos(x)) = (-2)\frac{(-\sin(x))^2}{(2+\cos(x))^2} - \frac{1}{2+\cos(x)}(\cos(x)) \tag{12.25}$$

$$\ln(2+\cos(x)) \approx \ln(3) - \frac{1}{3!}x^2 \tag{12.26}$$