Bevezető Kalkulus

Dominik szombathy

2022. december 5.

Kivonat

Coming soon ...

Tartalomjegyzék

1. Deriválás

Coming soon ...

2. Integrálás

2.1. Integrálási Technikák

2.1.1. Parciális Integrálás

2.1.2. Helyettesítéses integrálás 1

2.1.3. Helyettesítéses integrálás 2

2.1.4. "Fenman's trick"

Legyen az elvégzendő integrál a következő

2.1. Example.

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}. \tag{2.1}$$

Hogy ezt megoldjuk alkalmazhatunk egy $y = x + 1$ változócserét és egy pár parciális integrálást. Most ehelyett veszünk egy integrálfüggvényt a következő alakban[1]

$$I(\gamma) = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(\gamma x+1)}{1+x^2}. \tag{2.2}$$

, ahol most $\gamma \geq 0$. Látjuk hogy $I(\gamma = 1)$ esetben visszakapjuk az eredeti integrált amivel el akartunk bánni.

Differenciáljuk most $I(\gamma)$ függvényt γ szerint

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\ln(\gamma x+1)}{1+x^2} \tag{2.3}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\frac{\partial \ln(\gamma x+1)}{\partial \gamma}}{1+x^2} \tag{2.4}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{1+x^2} \frac{x}{\gamma x+1} \tag{2.5}$$

Ezen a ponton az ilyen alakú integráloknál megszokott módon parciális törtekre bontjuk az integrandust.

$$\frac{1}{1+x^2} \frac{x}{\gamma x+1} = \frac{x}{(\gamma x+1)(x^2+1)} \tag{2.6}$$

$$= \frac{\gamma + x}{(\gamma^2+1)(x^2+1)} - \frac{\gamma}{(\gamma^2+1)(\gamma x+1)} \tag{2.7}$$

[1] Választhattuk volna $I(\gamma)$-t olyan integrandussal is mely a tradicionálisabb $x \to \gamma x$ változócserének megfelelő $f(x) = \frac{\gamma x+1}{1+\gamma^2 x^2}$ integrandust adja, csupán a későbbiekben ez megnehezítené a dolgunkat.

Láthatjuk, hogy mindkét törtben megjelenik egy az x-re történő integrál tekintetében konstans tag $\frac{1}{\gamma^2+1}$, amit kiemelhetünk az integrál elé

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial\gamma} = \frac{1}{\gamma^2+1}\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{-\gamma}{\gamma x+1} + \frac{\gamma}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\right) \tag{2.8}$$

Az így kapott integrált könnyedén elvégezhetjük

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial\gamma} = \frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma x+1|) + \frac{1}{2}\ln\big(x^2+1\big) + \gamma\arctan(x)\right]_0^1 \tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma+1|) + \frac{1}{2}\ln(2) + \gamma\frac{\pi}{4}\right] \tag{2.10}$$

Ez azonban $I(\gamma)$ deriváltjának eredménye, hogy megkapjuk a korábbi γ függő integrált, az előbbi kifejezést ki kell integrálnunk:

$$\int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\partial I(\gamma)}{\partial\gamma} = I(1) - I(0) \tag{2.11}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{1}{\gamma^2+1}\left[-\ln(|\gamma+1|) + \frac{1}{2}\ln(2) + \gamma\frac{\pi}{4}\right] \tag{2.12}$$

$$= -\int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\ln(|\gamma+1|)}{\gamma^2+1} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} \tag{2.13}$$

$$= -I(1) + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} \tag{2.14}$$

$$2I(1) = \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\ln(2)}{2(\gamma^2+1)} + \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\frac{\gamma\pi}{4(\gamma^2+1)} \tag{2.15}$$

$$= \frac{\ln(2)}{2}\arctan(x)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{4}\ln\big(\gamma^2+1\big)\frac{1}{2}\Big|_0^1 \tag{2.16}$$

$$= 2\frac{\ln(2)}{2}\frac{\pi}{4} \tag{2.17}$$

Innen pedig a megoldás már egyértelmű, hiszen

$$I \equiv I(1) = \frac{\ln(2)\pi}{8} \tag{2.18}$$

Összefoglalva az integrálási technika lépéseit:

1. Vezessünk be egy paraméteres integrálfüggvényt, amely az eredeti integrálást, az új változó szerinti differenciálás egyszerűbbé teszi

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x f(x) \to I(\gamma) = \int_a^b \mathrm{d}x\tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.19}$$

2. Deriváljuk le az új integrálfüggvényünket az új paraméter szerint

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \int_a^b \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.20}$$

3. Végezzük el x-re az integrált, majd integráljuk ki mindkét oldalt az új változó szerint

$$\int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = I(1) - I(0) = \int_0^1 \int_a^b \mathrm{d}\gamma\, \mathrm{d}x\, \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{f}(\gamma, x) \tag{2.21}$$

4. Rendezzük $I(1)$-re az így kapott kifejezést.

2.2. Example (Egy triviális példa[2]: $f(x) = x^3 - x$)**.**

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x x^3 - x \tag{2.22}$$

$$I(\gamma) = \int_a^b \mathrm{d}x\, \gamma^3 x^3 - \gamma x \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \int_a^b \mathrm{d}x\, 3\gamma^2 x^3 - x \tag{2.24}$$

$$= 3\gamma^2 \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b \tag{2.25}$$

$$= 3\gamma^2 \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.26}$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}\gamma \frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = I(1) - I(0) = \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\, 3\gamma^2 \frac{b^4 - a^4}{4} - \int_0^1 \mathrm{d}\gamma\, \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.27}$$

$$= \frac{3\gamma^3}{3}\bigg|_0^1 \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2}\gamma\bigg|_0^1 \tag{2.28}$$

$$I(1) = I = \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.29}$$

3. Komplex számok

Coming soon ...

4. Vektortér, Vektor algebra

Coming soon ...

[2]Itt láthatjuk, hogy ha a függvényt $f(x) = x^3 - x + const.$ alakban adnánk meg, hogy a módszer rossz eredményre vezet, de ebben az esetben a konstans integrálását kezelhetjük külön integrálként.

5. Analítikus geometria

Coming soon . . .

6. Lineáris leképezések

6.1. Definition (Lineáris leképezés)**.** *Az* $\underline{\underline{A}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *transzformáció lineáris, ha* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ *esetén* $\underline{\underline{A}}\,(\alpha\, \underline{a} + \beta\, \underline{b}) = \alpha\, \underline{a}\, \underline{\underline{A}} + \beta\, \underline{b}\, \underline{\underline{A}}$

Adott $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ vektort, adott lináris leképezés egy $\underline{r}' \in \mathbb{R}^3$ vektorba képzi le. A lineáris leképezés mátrixát $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ jelölve, az $\underline{r}'$ vektor

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{r} = \underline{r}' \tag{6.1}$$

Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ lineáris leképezés mátrixának meghatározásához meg kell vizsgálnunk, hogyan hat egy adott vektor esetén annak bázisára. Példaként a kanonikus bázist tekintve a bázisvektorok transzformációját a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}\, \underline{i} &= a_{11}\, \underline{i} + a_{21}\, \underline{j} + a_{31}\, \underline{k} \\
\underline{\underline{A}}\, \underline{j} &= a_{12}\, \underline{i} + a_{22}\, \underline{j} + a_{32}\, \underline{k} \\
\underline{\underline{A}}\, \underline{k} &= a_{13}\, \underline{i} + a_{23}\, \underline{j} + a_{33}\, \underline{k}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

, ahol $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{3} = \underline{\underline{A}}$.

Remark. $\mathbb{R}^2$ esetén, adott lineáris leképezés mátrixa 2×2-es mátrixot jelent, így 9 meghatározandó elem helyett, csupán 4 elemet kell meghatározni.

Ezek alapján egy lineáris leképezés mátrixának hatása egy vektorra ($\underline{r} \in \mathbb{R}^3$) a következőképpen fejezhető ki: legyen $\underline{r} = (x, y, z) \equiv x\, \underline{i} + y\, \underline{j} + z\, \underline{k}$, ekkor felhasználva a bázisvektorokkal felírt definíciót

$$\begin{aligned}
\left(\underline{\underline{A}}\, \underline{r}\right)_i &= \left(x\, \underline{\underline{A}}\, \underline{i} + y\, \underline{\underline{A}}\, \underline{j} + z\, \underline{\underline{A}}\, \underline{k}\right)_i \\
&= (a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)\, \underline{i} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)\, \underline{j} + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)\, \underline{k} \\
&= \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\, r_j
\end{aligned} \tag{6.3}$$

6.1. Example (Mátrix és vektor szorzata)**.**

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{r} = (1, 2, 1) \\
\underline{\underline{A}}\, \underline{r} &= (1\cdot1 - 1\cdot2 + 0\cdot1, 0\cdot1 + 1\cdot2 - 1\cdot1, 1\cdot1 - 1\cdot2 + 1\cdot1) \\
&= (-1, 1, 0)
\end{aligned}$$

Vetítések, tükrözések vagy forgatások esetén érdemes felbontani a transzformálandó vektort a vetítésvektorra merőleges és párhuzamos komponensére (csakúgy mint a forgatások esetén a forgatás tengelyre merőleges- és párhuzamos komponensekre),

$$\underline{r} = \underline{r}_{\perp} + \underline{r}_{\parallel}. \tag{6.4}$$

A felbontás során találhatunk olyan komponenst amely a transzformáció során nem változik meg. Ennek kihasználása megkönnyítheti a számaításainkat.

A következőkben $\underline{v}$, $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\underline{r} = (x, y, z)$. $\underline{r}$ vektor $\underline{v}$-re való vetítése során először határozzuk meg előbbi vektor $\underline{v}$-n felmért hosszát, mint

$$\| \underline{r}_{\parallel} \| = \frac{\underline{v}\,\underline{r}}{\| \underline{v} \|}. \tag{6.5}$$

A vetíteni kívánt vektor iránya párhuzamos a vektorra amire vetítjük azt, így

$$\frac{\underline{r}'}{\| \underline{r}' \|} = \hat{\underline{r}}' \parallel \hat{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{\| \underline{v} \|}. \tag{6.6}$$

Ismerve a vetített vektor hosszát és irányát, azt felírhatjuk

$$\underline{r}' = \frac{\underline{v}\,\underline{r}}{\| \underline{v} \|} \frac{\underline{v}}{\| \underline{v} \|} = \frac{\underline{v}\,\underline{r}\,\underline{v}}{\| \underline{v} \|^2} = \underline{r}_{\parallel} \tag{6.7}$$

alakban. Ugyanakkor kihasználhatjuk a fent megjelenő skaláris szorzat azonosságát, miszerint

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = (\,\mathbf{c} \circ \mathbf{a})\ \underline{b}. \tag{6.8}$$

Ezen azonosság segítségével pedig a vetíteni kívánt vektor kiemelhető a (6.7). képletből.

6.1. Exercise (Vetítés vektorra)**.** Legyen $\underline{v} = (1, -1, 2)$ és adjuk meg az erre a vektorra való vetítés lineáris leképezésének mátrixát. A fentiek alapján határozzuk meg a tetszőleges $\underline{r}$ merőleges vetületét és szorozzuk meg a $\underline{v}$-irányába mutató egységvektorral.

$$\|v\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \|v\|^2 = 6$$
$$\underline{v}\,\underline{r} = x - y + 2z$$

$$\underline{r}' = \frac{1}{6}\,(x - y + 2z,\ -x + y - 2z,\ 2x - 2y + 4z) \tag{6.9}$$

Vegyük most az általános lineáris leképezés mátrix és tetszőleges vektor közötti (6.1). összefüggést és hasonlítsuk össze az általunk kapott vektorral.

A mátrix együtthatói $\underline{r}'$-ra kapott összefüggésből leolvashatóak az általános mátrix-vektor szorzat ismeretében:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

6.2. Exercise (Vetítés síkra)**.** Legyen adott az S sík egy normálvektora $\underline{n} = (2, 1, -1)$, $|\underline{n}|^2 = 6$, ekkor a normálvektorra merőleges vetületét kell meghatároznunk a tér egy adott $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorának. Ekkor bontsuk fel $\underline{r}$-t az $\underline{n}$-re merőleges és az arra párhuzamos komponens összegeként:

$$\underline{r} = \underline{r}_{\|} + \underline{r}_{\perp}, \tag{6.11}$$

ahol $\underline{r}_{\|} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{\|\underline{n}\|^2}\underline{n}$ egyszerűen az előző példában kiszámított párhuzamos vetület, ekkor egyszerűen a merőleges vetület, vagyis az $\underline{r}$ vektor S síkban tartozkodó része:

$$\begin{aligned} \underline{r}_{\perp} &= \underline{r} - \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{\|\underline{n}\|^2}\underline{n} \\ &= (x, y, z) - \frac{2x + y - z}{6}(2, 1, -1) \\ &= \frac{1}{6}(2x - 2y + 2z, -2x + 5y + z, 2x + y + 5z)\,, \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ahonnan a mátrix már könnyen leolvasható:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

6.3. Exercise (Vektorra merőleges komponens meghatározása)**.** Legyen most $\underline{v} = (-1, -1, 1)$. Itt ugyanaz a feladatunk, mint ahogy a síkra való vetítésnél az $\underline{n}$ normálvektor esetében eljártunk, vagyis vegyük a tetszőleges $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ vektor $\underline{v}$-ra merőleges és azzal párhuzamos vetület szerinti felbontását:

$$\underline{r} = \underline{r}_{\|} + \underline{r}_{\perp}, \tag{6.14}$$

ahol ismét az első feladat alapján, $\underline{r}_{\|} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\underline{v} = \frac{-x-y+z}{3}(-1, -1, 1)$, vagyis a merőleges komponens $\underline{r}_{\perp} = \underline{r} - \underline{r}_{\|} = (x, y, z) - \frac{-x-y+z}{3}(-1, -1, 1) = \frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y - z, x + y + 2z)$, ahonnan a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

6.4. Exercise (Forgatás 2 dimenzióban)**.** Adott φ szöggel való forgatás 2 dimenzióban. Vegyük $\underline{i}$ és $\underline{j}$ bázisvektorokat, ekkor egy tetszőleges vektor forgatása egyenértékű a bázisvektorok forgatásával. Ezek transzformáltja pedig

$$\underline{i}' = \cos(\varphi)\ \underline{i} + \sin(\varphi)\ \underline{j} \tag{6.16}$$

$$\underline{j}' = -\sin(\varphi)\ \underline{i} + \cos(\varphi)\ \underline{j} \tag{6.17}$$

alakban írható fel. Ezen egyenletekből pedig leolvashatjuk a lineáris transzformáció mátrixát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Remark. Most számítsuk ki az inverzét a φ szögű forgatás mátrixának. 2×2-es mátrixok esetén az általános

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

mátrixnak az inverze a következő képpen adható meg:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Innen a forgatás mátrix inverze egyszerűen

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix}, \tag{6.20}$$

vagyis ahogy vártuk, a φ szöggel való forgatás mátrixának inverze nem más mint a $-\varphi$-vel való forgatás mátrixa.

6.5. Exercise (Tükrözés síkra)**.** Hasonlóan járhatunk el, mint amikor a síkra vett vetületet néztük. Felbontjuk a tér egy adott $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát az S sík $\underline{n}$ normálvektorával párhuzamos, illetve arra merőleges komponensére, $\underline{r} = \underline{r}_{||} + \underline{r}_{\perp}$, ahol a fentiek alapján, $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\underline{n}|^2}\,\underline{n}$. Ekkor a síkra való tükrözés nem változtatja meg a síkkal párhuzamos (a normálvektorra merőleges komponenst), viszont $\underline{r}_{||} \to -\underline{r}_{||}$ módon változtatja meg a normálvektorral párhuzamos (síkra merőleges) komponenst, vagyis összességében:

$$\underline{r}' = \underline{r}_{\perp} - \underline{r}_{||} \equiv \underline{r} - 2\,\underline{r}_{||} = \underline{r} - 2\frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\underline{n}|^2}\,\underline{n} \tag{6.21}$$

Legyen most $\underline{n} = (1, 0, 1)$, ekkor $\underline{r}_{||} = \frac{x+z}{2}(1, 0, 1)$, vagyis a tükörkép vektor

$$\underline{r}' = (x, y, z) - (x+z)(1, 0, 1) = (-z, y, -x)\,, \tag{6.22}$$

ahonnan a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

6.6. Exercise (Tükrözés vektorra)**.** Ekkor ismét a tér egy tetszőleges $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát felbontjuk az adott $\underline{v}$-vel párhuzamos és az arra merőleges komponense szerint, $\underline{r} = \underline{r}_\perp + \underline{r}_{||}$, ahol ismét a fentiek alapján $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\,\underline{v}|^2}\,\underline{v}$. Ekkor, mivel most magára a vektorra és nem a vektorra merőleges síkra tükrözünk, a vektorral párhuzamos komponens fog változatlan maradni, és a merőleges komponensnek kell vennünk a mínusz egyszeresét, $\underline{r}_\perp \to -\,\underline{r}_\perp$, vagyis a transzformáció összességében:

$$\underline{r}' = \underline{r}_{||} - \underline{r}_\perp = 2\,\underline{r}_{||} - \underline{r} = 2\frac{\underline{r}\cdot\underline{v}}{|\,\underline{v}|^2}\,\underline{v} - \underline{r}. \tag{6.24}$$

Most legyen $\underline{v} \equiv (1, 0, 0)$, ekkor $\underline{r}_{||} = (x, 0, 0)$, vagyis a transzformált vektor, $\underline{r}' \equiv (x, -y, -z)$, ahonnan pedig a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

6.7. Exercise (Forgatás 3 dimenzióban, tetszőleges vektor körül)**.** Ehhez először bontsuk fel a tér egy tetszőleges $\underline{r} = (x, y, z)$ vektorát a forgatási vektorra párhuzamos, $\underline{r}_{||} = \frac{\underline{n}\cdot\underline{r}}{|\,\underline{n}|^2}\,\underline{n}$, illetve az arra merőleges, $\underline{r}_\perp = \underline{r} - \underline{r}_{||}$ komponensre és vegyük észre, hogy ekkor a párhuzamos komponens változatlan marad! (megjegyzés: utólagosan kicsit megváltoztattam a jelölést ahhoz képest amit órán használtam) Ami a merőleges komponenst illeti, azt egy olyan koordinátarendszerben kell φ szöggel elforgatnunk, amiben az egyik bázisvektor ($\,\underline{r}_i$) egyszerűen $\underline{r}_\perp$ feleltethető meg (ahol lenomrálhatjuk a nagyságát 1-re, hiszen $|\,\underline{i}| = 1$, ám ekkor a bázis forgatása után ismernünk kell $\underline{r}_\perp$ vektor nagyságát, ami most nem célravezető), illetve a másik bázisvektornak ($\,\underline{j}$) pedig a $\underline{r}_j \equiv \frac{\underline{n}}{|n|} \times \underline{r}_\perp$ vektorral azonosíthatjuk. (jelen esetben itt a bázis nagysága azonos a tetszőleges vektor ($\,\underline{r}$) merőleges komponensével ($\,\underline{r}_\perp$). Ekkor a φ szögű forgatás egyszerűen:

$$\underline{r}'_\perp = \cos(\varphi)\,\underline{r}_i + \sin(\varphi)\,\underline{r}_j \tag{6.26}$$

Mivel a párhumos komponens változatlan marad, a forgatott vektor:

$$\underline{r}' = \frac{\underline{r}\cdot\underline{n}}{|\,\underline{n}|^2}\,\underline{n} + \cos(\varphi)\,\underline{r}_i + \sin(\varphi)\,\underline{r}_j \tag{6.27}$$

Ahol az első tag a párhuzamos komponenst a második kettő pedig a merőleges komponenes φ-vel forgatott esete látható.

Legyen $\underline{n} = (1, 0, 1)$ és $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
A szükséges mennyiségek:

$$\underline{r}_\perp = \underline{r} - \frac{\underline{n}\cdot\underline{r}}{|\,\underline{n}|^2}\,\underline{n} = (x, y, z) - \frac{1}{2}(x+z, 0, x+z) = \frac{1}{2}(x-z, 2y, z-x)\,,$$

$$\frac{\underline{n}}{|n|} \times \underline{r}_\perp = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y, x-z, y)$$

Innen a transzformált vektor:

$$\begin{aligned}\underline{r}' &= \frac{1}{2}(x+z, 0, x+z)\\ &+ \cos(\pi/4)\frac{1}{2}(x-z, 2y, z-x)\\ &+ \sin(\pi/4)\frac{1}{\sqrt{2}}(-y, x-z, y)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\left(\sqrt{2}+1\right)x - \sqrt{2}y + \left(\sqrt{2}-1\right)z\\ 2y + \sqrt{2}(z-x)\\ \left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{2}y + \left(\sqrt{2}+1\right)z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ahonnan pedig a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1\\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+1\end{bmatrix}. \tag{6.28}$$

7. Mátrix determináns számítás

7.1. Definition (Mag). *Az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix/lineáris leképezés,* $\underline{\underline{A}} \in Lin(\mathbb{V}, \mathbb{U})$, $\underline{\underline{A}} : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ *magja azon vektorok, melyeket a mátrix a null vektorba viszi:*

$$\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} = \left\{ \underline{v} \in \mathbb{V},\, \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{0} \in \mathbb{U} \right\} \tag{7.1}$$

7.2. Definition (Képtér). *Az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix/lineáris leképezés képtere azon vektorok halmaza, amelyeket a* $\mathbb{V}$ *vektoraiból kapunk, ha hattatjuk rájuk a mátrixot/lineáris leképezést:*

$$\operatorname{Im} \underline{\underline{A}} = \left\{ \underline{\underline{A}}\,\underline{v},\, \underline{v} \in \mathbb{V} \right\} \tag{7.2}$$

7.1. Theorem (Dimenziótétel). $\underline{\underline{A}} \in \operatorname{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$ *esetén* $\dim \mathbb{V} = \dim\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} + \dim\operatorname{Im} \underline{\underline{A}}$.

7.1. Example (Dimenziótétel példa). Legyen $\underline{\underline{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$-ból az x, y síkra való vetítés, azaz

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor a mag, a z irányba mutató vektorok halmaza, hiszen látható, hogy a csak z komponenssel rendelkező vektorok x, y síkra vetítése során a null vektort adják vissza. Más szavakkal, ha $\underline{v} = (0, 0, z)$, akkor $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = (1 \cdot 0, 1 \cdot 0, 0 \cdot z) \equiv (0, 0, 0)$, vagyis a mag $\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} = \{(0, 0, z)\,, z \in \mathbb{R}\}$.
A képtér a leírásból is láthatóan minden az x, y síkban lévő vektor, vagyis $\mathbb{R}^2$, hiszen egy tetszőleges vektort véve, $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, azaz $\operatorname{Im} \underline{\underline{A}} = \{(x, y, 0)\,, x, y \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}^2$.

7.3. Definition (Permutációk). $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *halmaz permutációja, ha* σ *bijektív leképezés.*

7.2. Example (Permutáció 1.példa). $\sigma\,\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 1, 4\}$, vagyis $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 4$.

7.3. Example (Permutáció 2.példa). $\sigma\,\{1, 2, 3\} = \sigma\,\{3, 1, 2\}$, vagyis $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$, ami éppen egy ciklikus permutációja az $\{1, 2, 3\}$-nak!

7.4. Definition (Inverziók). *Ha* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*-ra teljesül, hogy* $i < j$ *és* $\sigma(j) < \sigma(i)$*, akkor a két elem inverzióban áll egymással, ekkor* $I(\sigma)$ *az inverziók száma.*

Permutáció paritása: $(-1)^{I(\sigma)}$, vagyis $+1$, amikor az eredeti sorrend páros sok pár cserével kapható vissza, ezeket nevezzük *páros permutációknak* és -1, ha páratlan sokkal, ezeket pedig *páratlan permutációknak* nevezzük! Három dimenzióban ez éppen megegyezett a ciklikus és a nem ciklikus permutációkkal.

7.4. Example (Inverziók száma 1.példa).

$\sigma\{1,2,3,4\} = \{2,3,1,4\}$. Ekkor megcserélve a 3-ast és 1-est, illetve ezt követően a 2-est és az 1-est visszakapjuk az eredeti halmazt, vagyis páros sok cserére volt szükségünk, azaz $I(\sigma) = 2$, illetve a paritás $(-1)^{I(\sigma)} \equiv +1$.

7.5. Example (Inverziók száma 2.példa). $\sigma\{1,2,3,4,5\} = \{5,1,2,4,3\}$: Először érdemes a végén lévő 3-ast és 4-est megcserélnünk annak érdekében, hogy leszámítva az első 5-öst az elemek egymáshoz vizonyított sorrendje stimmeljen, ekkor az így kapott $\{5,1,2,3,4\}$-ből visszakaphatjuk az eredeti halmazt, ha az 5-öst rendre felcseréljük az 1-essel, a 2-essel, a 3-assal és a 4-essel, ami így összesen 5 párcserét jelent, vagyis $I(\sigma) = 5$, illetve a paritás $(-1)^{I(\sigma)} \equiv -1$.

7.6. Example (Inverziók száma 3.példa).

σ, illetve az inverze σ^{-1}-nek azonos az inverziószámuk és így azonos paritásúak, hiszen ugyanannyi párcsere szükséges a visszarendezéshez, mint az eredeti permutációhoz,

$$\sigma^{-1}\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = \{1,2,\ldots,n\}$$

7.5. Definition (Determináns). *Az* $\underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R})$, *vagyis valós értékű* $n \times n$-*es mátrixok esetén*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

a mátrix determinánsa a következőképpen írható fel:

$$\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)} \tag{7.4}$$

Vagyis összegzünk az $\{1,2,\ldots,n\}$ minden permutációjára és az adott permutáció alapján választjuk ki az adott sorokból az elemeket. Az így kapott szorzatot az adott permutáció pariásával súlyozzuk.

2x2-es mátrixok esetén két lehetséges permutációnk van, a $\sigma_1\{1,2\} = \{1,2\}$, az identitás, nulla párcserével és így $(-1)^{I(\sigma_1)} \equiv +1$ paritással, illetve az egyetlen nem triviális permutáció, $\sigma_2\{1,2\} = \{2,1\}$, ahol egyetlen párcserét végeztünk el, vagyis a paritás $(-1)^{I(\sigma_2)} \equiv -1$.

Alkalamzva a definíciót:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= (-1)^{I(\sigma_1)} a_{1\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} + (-1)^{I(\sigma_2)} a_{1\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

ami épp a korábbiakban bevezetett definícióval egyező eredményt adja vissza!

Mátrix determináns néhány tulajdonsága:

- Mátrix transzponáltjának determinánsa a mátrix determinánsával megegyezik: $\left[\underline{\underline{A}}^T\right]_{i,j} = \left[\underline{\underline{A}}\right]_{j,i}$,

$$\det\left(\underline{\underline{A}}^T\right) = \det\left(\underline{\underline{A}}\right). \tag{7.5}$$

- Ha egy mátrix két sora, vagy oszlopa azonos, akkor a determináns nulla, $a_{i,k} = a_{i,j}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq j$ vagy $a_{k,i} = a_{j,i}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq j \to \det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 0$.
- Oszlopok avagy sorok cseréje megváltoztatja a determináns előjelét!
- Ha egy sor vagy oszlop csupa nulla, akkor a determináns zérus, $a_{i,k} = 0$ vagy $a_{k,i} = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots \to \det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 0$.
- Egy sor vagy oszlop λ-szorosát vesszük a mátrix determinánsa is λ-szorosára nő.
- Sorok és oszlopok egymás között lineár kombinálhatóak, anélkül, hogy változna a determináns. Vagyis bármelyik sor tetszőleges számszorosát hozzáadhatjuk egy másik sorhoz és a determináns nem fog megváltozni.
- Alsó/Felső háromszög mátrixok determinánsa a diagonális elemek szorzata.

7.1. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

Mivel ez egy felsőháromszög mátrix a determinánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$.

7.2. Exercise. Felhasználva azt a szabályt, hogy ha egy mátrix sorában vagy oszlopában minden elem zérus, akkor a determináns értéke is azonosan nulla, érdemes speciális egyszerű esetekben megpróbálni egyes sorokat/oszlopokat kinullázni egy másik sor vagy oszlop hozzáadásával:
Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Látható, hogy ha levonjuk az első sort a másodikból, illetve hozzáadjuk a harmadik sort a másodikhoz, akkor éppen kinulláztuk annak minden elemét, vagyis ez a determináns zérus, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) \equiv 0$!

7.3. Exercise. Felhasználva, a háromszög mátrixoknál tanult tulajdonságokat, illetve azt a az azonosságot, hogy bármely két sor/oszlop cseréje nyomán a determináns előjelet vált, tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Látható, hogy ha megcseréljük először a második és a hamradik sort $2 \leftrightarrow 3$, majd a harmadikat és a negyediket $3 \leftrightarrow 4$, akkor éppen következő felső háromszög mátrixra jutunk:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

aminek a determinánsa egyszerűen az átlós elemek szorzata, vagyis $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Itt két cserét végeztünk el, ami így egy $(-1)^2 = 1$-es szorzót jelentett.

7.4. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

Adjuk hozzá a 4. sor -$\frac{1}{2}$-szeresét a 2. sorhoz, ezzel kinulláztuk a 2. sor utolsó elemét:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 7/2 & 4 & 3/2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Így a harmadik sorral kinullázhatjuk a 2. sor 3. elemét és az 1. sor 3. elemét, ahonnan

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 5/2 & 0 & 0 \\ 23/4 & 13/4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Most kinullázhatjuk a 2. sor $-10/13$-szorosával az 1. sor 2. elemét:

$$\begin{bmatrix} -152/52 & 0 & 0 & 0 \\ 23/4 & 13/4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

Aminek a determinánsa csak a főátlóban lévő elemek szorzata, vagyis $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = -152/52 \cdot 13/4 \cdot (-2) \cdot 2 = 38$.

7.5. Exercise.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

Látható, hogy az első oszlop 2., 3. és 4. sora rögtön kinullázható, ha levonjuk belőlük az első sor elemeit, ekkor a következő mátrix adódik:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Most vonjuk ki a második sor 2-eresét a 3.-ból, illetve a 3-orosát a 4. sorból, amiből

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez már egy felső háromszög mátrix, amin rögtön látszik, hogy a determinánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

7.6. Exercise. Számítsuk a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Hozzuk felső hárosmzög alakra, ehhez először ismét az 1. oszlop 2., 3. és 4. sorának elemeit nullázzuk ki az 1. sor segítségével, vagyis vonjuk ki a megfelelő sorokból az első sor 2, 3 és 4-szeresét, ahonnan

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{bmatrix}$$

Most vonjuk ki a 2. sor 2, illetve 7 -szeresét a 3., illetve a 4. sorból, ekkor a következő mátrix adódik:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{bmatrix}$$

Ezt követően adjuk hozzá a 3. sort a 4.-hez, ahonnan már egy felső háromszög mátrix adódik

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

aminek a deteriminánsa egyszerűen a főátlóban lévő elemek szorzata, $\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160$.

Kifejtési tétel: Előjeles aldetermináns: $A_{i,j}$ úgy kapható meg, hogy kivesszük az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i-ik sorát és j-edik és vesszük az így létrejövő $\tilde{\underline{\underline{A}}}_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, $n-1 \times n-1$-es mátrix determinánsát$\times(-1)^{i+j}$. Ekkor a mátrix detrminánsa előáll a következő módon, ha egy tetszőleges $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$-adik *oszlop szerint fejtjük ki*

$$\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k} \tag{7.15}$$

Illetve az $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sor szerinti kifejtés segítségével:

$$\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k} \tag{7.16}$$

7.7. Exercise. A kifejtési tétellel egyszerűen visszakapható a 2×2-es mátrixok determinánsának képlete egy tetszőleges

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

.
Triviálisan az (i, j)-ik aldetermináns egyszerűen az az egy elem, amit nem zártunk ki$\times(-1)^{i+j}$. Vagyis $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$, most fejtsük ki az első sor zerint vagyis

$$\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a \cdot d + b \cdot (-c) \equiv ad - bc$$

7.8. Exercise. Mutassuk meg a kifejtési tétel segítségével, hogy a 3×3-as mátrixok determinánsának "varázs képlete" visszakapható a kifejtési tétel és a 2×2 mátrixok determinánsának ismeretében, legyen a mátrix átlalánosan:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Fejtsük ki most az első sor szerint ismét, ekkor a három megfelelő aldetermináns:

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} = ei - fh,\ A_{12} = -\det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} = fg - di,\ A_{13} = \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} = dh - eg.$$

Ekkor a 3×3-as determináns a kifejtsi szabály alapján:

$$\begin{aligned}\det\left(\underline{\underline{A}}\right) &= aA_{11} + bA_{12} + cA_{13} \\ &= a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg) \\ &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.\end{aligned}$$

7.9. Exercise. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

Fejtsük ki az első sor alapján, ugye ekkor csak azt az aldeterminánst kell tekintenünk, amikor az 1. sort és a 2. oszlopot vesszük ki, ekkor a fentmaradó aldetermináns:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+2} \det\left(\tilde{\underline{\underline{A}}}_{12}\right), \tag{7.18}$$

ahol

$$\tilde{\underline{\underline{A}}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.19}$$

aminek a determinánsa a 3×3-as esetben tanultak alapján egyszerűen $\det\left(\tilde{\underline{\underline{A}}}_{12}\right) = 30$, ahonnan összességében az eredeti mátrix determinánsa $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = -\det\left(\tilde{\underline{\underline{A}}}_{12}\right) = -30$.

7.10. Exercise. Számítsuk ki a kifejtési tétel segítségével a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy ha a harmadik sor szerint fejtjük ki a mátrixot, egyszerűen csak egy előjeles aldeterminánst kell kiszámolnunk,

$$A_{32} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -(12 - 1 + 8 - 8 - 2 + 6) = -15,$$

vagyis a teljes determináns $\underline{\underline{A}}A = 2A_{32} = -30$.

7.11. Exercise. Határozzuk meg kifejtési tétel segítségével a következő mátrix determinánsát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Fejtsük ki ismét azon oszlop/sor szerint, mely a legtöbb 0-át tartalmaz, ekkor érdemes a 3. oszlop szerint kifejteni. Ekkor csak két előjeles aldeterminánst kell kiszámítanunk, A_{33}, A_{43}:

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -3 - 6 + 6 - 8 + 1 + 18 = 8,$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -(-2 - 9 + 16 + 12 + 2 + 12) = -31,$$

ahonnan a teljes determináns egyszerűen $\det(\underline{\underline{A}}) = 1 \cdot A_{33} + (-1) \cdot A_{43} = 8 + 31 = 39$.

8. Mátrix Inverz számítás

Definíció(inverz mátrix) Az $n \times n$-es valós $\underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix inverze $\underline{\underline{A}}^{-1}$, amire telejsül, hogy $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$, ahol $(\underline{\underline{1}})_{ij} = \delta_{ij}$.
Kiszámítása:

$$\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{A}})} adj(A)_{ji}, \tag{8.1}$$

ahol ismét A_{ji} a j-edik sor és az i-edik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsa $\times(-1)^{j+i}$.

8.1. Exercise. Diagonális mátrix inverze az a mátrix, mely szintén diagonális egyszerűen a főátlóban lévő elemek reciprokával, vagyis legyen most 3×3-as esetben

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

ekkor az inverz mátrix egyszerűen

$$(\underline{\underline{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix}.$$

8.2. Exercise. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

A determináns egyszerűen $\det(\underline{\underline{A}}) = ad - bc$, illetve az előjeles aldeterminánsok rendre $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$. Vagyis az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

8.3. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A fentiek alapján ekkor az inverz mátrix (a determináns $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 3 - 7 = -4$):

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{3}-2 \\ -2-\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

8.4. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 4 + 4 + 3 = 11$. Illetve az előjeels aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4,\ A_{12} = -\det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2,\ A_{13} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$
$$A_{21} = -\det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -8,\ A_{22} = \det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 7,\ A_{23} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$
$$A_{31} = \det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 7,\ A_{32} = -\det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 7,\ A_{33} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

8.5. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = 6 + 6 = 12$. Illetve az előjeles aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -9,\ A_{12} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 6,\ A_{13} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3$$
$$A_{21} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 6,\ A_{22} = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -4,\ A_{23} = -\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 2$$
$$A_{31} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3,\ A_{32} = -\det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2,\ A_{33} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -9 & 6 & 6 \\ 6 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

8.6. Exercise. Számítsuk ki a következő mátrix inverzét

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elsőnek a determinánst adjuk meg, ami a 3×3-as esetben a tanult egyszerű módszer alapján, $\det\big(\underline{\underline{A}}\big) = 1 - (1+i)(1-i) + i^2 = -2$. Illetve az előjeles aldeterminánsok:

$$A_{11} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ A_{12} = -\det\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} = i,\ A_{13} = \det\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = i - 1$$

$$A_{21} = -\det\begin{bmatrix} i & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -i,\ A_{22} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} = -1,\ A_{23} = -\det\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = -1 - i$$

$$A_{31} = \det\begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 - i,\ A_{32} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = 2,\ A_{33} = \det\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Innen az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & -1 & 2 \\ i-1 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$$

9. Gauss elimináció

9.1. Gauss-elimináció egyenletrendszerek megoldására

A következőkben lineáris egyenletrendszerek megoldására fogjuk alkalmazni a Gauss-eliminációt. Tekintsük példaként a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x - 2y + z &= 3 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásának a menete a következő lépésekből áll:

1. **Mátrix megalkotása:** Először írjuk fel az együtthatókat mint egy 3×3-as mátrixot, majd vegyük hozzá 4. oszlopként az egyes egyenletek

értékét, vagyis

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Ekkor az adott soroknak vehetjük a *lineáris kombinációjukat*, amivel az egyenletrendszer ekvivalens marad, hiszen csak az egyenleteket adtuk össze, illetve vettük azok adott számszorosát. Célunk, hogy addig alakítsuk a sorokat míg a végén a 3×3-as részt az egységmátrix alakjára hozzuk[3], ekkor nyomon követve az utolsó oszlopban található értékek változását a három változó értéke éppen azokkal fog megegyezni.

2. **Mátrix sorainak alakítása:** Először adjuk hozzá az 1. sor -2-szeresét a 2. sorhoz, illetve -1-szeresét a 3. sorhoz, amivel kimulláztuk a 2. és 3. sor első elemeit:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

Most nullázzuk ki a 3. sor 2. elemét, vagyis levonjuk a 2. sor $1/3$-szorosát a 3. sorból:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -1/3 & -4/3 \end{array}\right]$$

Most visszafele haladunk és kinulázzuk a felső háromszög részben maradt nem nulla elemeket, ehhez először hozzáadjuk a 3. sor 21-szeresét a 2. sorhoz, illetve a -9-szeresét az 1. sorhoz, ami után

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -6 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & -1/3 & -4/3 \end{array}\right]$$

[3] A sorok lineárkombinációja során minden lépésben értelmezhetjük a mátrix elemeit mint egyenletrendszert, így a megoldást akkor is leolvashatjuk ha a mátrix minden sora csak egy nullától különböző elemet tartalmaz.

utolsó lépésként pedig adjuk hozzá a 2. sor 1/3-szorosát az 1. sorhoz, illetve vegyük a 2. sor $-1/6$-szorosát és a 3. sor -3-szorosát, ahonnan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 5.5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

3. **Megoldások leolvasása:** Ez egyértelműen mutatja, hogy $x = -19$, $y = 5.5$, $z = 4$.

9.1. Exercise. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 6 \\ 7x + 8y &= 9. \end{aligned}$$

Ennek megfelelő mátrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

$-7/4 \times$ 1.sor+2. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3/4 & -3/2 \end{array}\right]$$

$20/3 \times$ 2. sor+1. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -3/4 & -3/2 \end{array}\right]$$

ahonnan $x = -1$, $y = 2$.

9.2. Exercise. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 5z &= 6 \\ 7x + 8y + 8z &= 10 \end{aligned}$$

A megfelelő mátrixos alak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 10 \end{array}\right]$$

$-4 \times 1.$ sor+2. sor, illetve $-7 \times 1.$ sor+3. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & -11 \end{array}\right]$$

$-1 \times 2.$ sor+3. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$-1 \times 3.$ sor+2. sor, illetve $2/3 \times 3.$ sor+1. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$-1 \times 2.$ sor+1. sor, illetve $-3/5 \times 3.$ sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right]$$

vagyis $x = -11/3$, $y = -4$, $z = 5/3$.

9.3. Exercise. Mutassuk meg a következő egyenletrendszerről, hogy bár több egyenletünk van, mint ismeretlenünk mégis egyértelműen megoldható!

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ -2x + y &= 2 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

A mátrixos alak:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$2 \times 1.$ sor + 2. sor és $-1 \times 1.$ sor + 3. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

Most 1×2. sor + 3. sor, ahonnan látható, hogy a harmadik sor csupa nullából fog állni, ami így nem képez tiltott sort, vagyis elhagyhatjuk és elegendő csupán az első két sort vizsgálnunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$-3/5 \times 2$. sor + 1. sor, illetve ezt követően 2. sor $\rightarrow -1/5 \times 2$. sor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ahonnan a megoldás már egyértelmű: $x = -7/5$, $y = -4/5$.

9.2. Gauss-elimináció mátrixok invertálására

Hasonlóan működik mint a lineáris egyenletrendszerek megoldása esetében, azonban itt az invertálandó mátrix mellé nem csak egy *eredmény* vektort veszünk, hanem n-et ahol az i-edik oszlopban csak az i-edik tag nem nulla, ezen elem értéke 1, vagyis a megfelelő méretű egységmátrixot.

9.4. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ekkor kiegészítjük még jobb oldalról a 3×3-as egységmátrixszal és a sorok megfelelő lineáris kombinációjával megpróbáljuk 3×3-as egységmátrix alakra hozni a bal oldali mátrixot, ekkor a jobb oldalon kialakuló mátrix adja meg az inverz mátrixot!

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

-4×1. sor +2. sor, 1. sor+3. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$2/3 \times 2.$ sor+3. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -5/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right]$$

$-6 \times 3.$ sor+2. sor, $-5/2 \times 3.$ sor+1. sor:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -5/2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -5/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right]$$

Végül mindegyik sort szorozzuk meg úgy, hogy az egységmátrixot kapjuk meg:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 1/3 & 1 \end{array}\right].$$

Ekkor az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverzét a jobb oldalon leolvashatjuk.

9.5. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$-1 \times 1.$ sor + 3. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$-4 \times 2.$ sor + 3. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$1/2 \times 3.$ sor + $-1 \times 3.$ sor + 1. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

2. sor + 1. sor, illetve azért, hogy megkapjuk baloldalt az egységmátrixot, $3 \to 1/2 \times 3$. sor, $1 \to 1/4 \times 1$. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & 3/4 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

vagyis az inverz mátrix:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & 3/4 & -1/8 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

9.6. Exercise. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Látszik, hogy itt a "szokásosnál" jóval könnyebb dolgunk van, hiszen egy felső háromszög mátrixot kell csak invertálnunk! 2×3. sor + 2. sor és -7×3. sor + 1. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2×2. sor + 1. sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

vagyis az inverz mátrix egyszerűen

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Sajátértékek és sajátvektorok

10.1. Definition (Sajátérték, sajátvektor)**.** *az* $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ *mátrix* $\underline{v} \in \mathbb{V}$ *sajátvektorához tartozó sajátértéke,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *vagy* $\mathbb{R}$*, ha*

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}, \;\; \underline{v} \neq \underline{0}. \tag{10.1}$$

Sajátérték meghatározsása: A karakterisztikus egyenlet,

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\right) = 0, \tag{10.2}$$

megoldásai szolgáltatják, majd az adott λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_i\mathbb{I}\right)\,\underline{v}_i = 0 \tag{10.3}$$

egyenlet alapján határozhatjuk meg.

10.1. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátvektorait és sajátértékeit:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = 0 \end{aligned}$$

$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 5/2 \pm \sqrt{25/4 + 14} = 5/2 \pm 9/2 \rightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2.$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Bár ez két egyenlet, de ezek *ekvivalensek* egymással, azaz csak a két komponens között adnak egy összefüggést, az első komponensből származó egyenlet alapján $x = y$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t(1,1)$, ahol $t \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám, ezt nevezzük az sajátvektor által kifeszített altérnek!
A második sajátvektor:

$$\lambda_2 : \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 5x = 4y \rightarrow y = 5/4x$$

Innen a második sajátvektor: $\underline{v}_2 = t(1, 5/4)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.2. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátvektorait és sajátértékeit:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2i \\ 2i & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$$

$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5.$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_1: \quad \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ismét csak egy összefüggés adódik a két komponens között, ami a fentebbi egyenlet alapján $x = 2iy$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t(2i, 1)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
A második sajátvektor:

$$\lambda_2: \quad \begin{bmatrix} -4 & -2i \\ 2i & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \to x = -i/2y$$

Innen a keresett sajátvektor: $\underline{v}_2 = t(i/2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.3. Exercise. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy az alábbi mátrix sajátvektorai ortogonálisak legyenek egymásra:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = \frac{1}{3} \det\left(\begin{bmatrix} 1-3\lambda & p \\ -1 & 1-3\lambda \end{bmatrix} \right) = (1-3\lambda)(1-3\lambda) - p = 0$$

$$1 - 3\lambda = \pm\sqrt{p} \to \lambda_\pm = \frac{1 \mp \sqrt{p}}{3}$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_+: \quad \begin{bmatrix} \sqrt{p} & p \\ 1 & \sqrt{p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Az összefüggés a komponensek között az első egyenlet alapján $-\sqrt{p}x = y$, ahonnan az első sajátvektor $\underline{v}_1 = t\big(1, -\sqrt{p}\big)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
A második sajátvektor ugyanaz lesz mint az első csak most a $-\sqrt{p}$ értékkel: $\underline{v}_2 = t\big(1, \sqrt{p}\big)$. A két sajátvektor ortogonális, ha $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1 - p = 0 \to p = 1$.

10.4. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) &= \det\left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7-3\lambda & 2i & 0 \\ 2i & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-3\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{27}(7-3\lambda)(2-3\lambda)(9-3\lambda) + \frac{4}{27}(9-3\lambda) \\ &= (3-\lambda)\big((7-3\lambda)(2-3\lambda) + 4\big) = 0 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek egy megoldása biztosan a $\lambda_1 = 3$ a szorzat első tagja alapján, a másik kettőt pedig az $(7 - 3\lambda)(2 - 3\lambda) + 4 = 9\lambda^2 - 27\lambda + 18 = (3\lambda - 6)(3\lambda - 3) = 0$ másodfokú egyenlet szolgáltatja, ahonnan $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$.
Innen a sajátvektorok rendre:

$$\lambda_1 : \begin{bmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Látható, hogy a z komponensre nem kapunk összefüggést, vagyis annak értéke tetszőleges, ez paraméterezi a sajátvektort, míg az x, y komponensre egyértelmű eredményt kapunk az első egyenlet alapján: $x = iy$, illetve a második egyenlet alapján $x = -7iy \to x = 7x \to x = 0, y = 0$.
Innen $\underline{v}_1 = t(0, 0, 1)$, $t \in \mathbb{C}$.

$$\lambda_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 2i & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

A harmadik komponensre vonatkozó egyenlet alapján $z = 0$, illetve ekkor az első két egyenlet ekvivalens lesz egymással és csak az első két komponens közötti összefüggést adja meg, vegyük most az első egyenletet, $x = -2iy$, látható, hogy ez a második egyenletet is kielégíti!
Innen a második sajátvektor $\underline{v}_2 = t(-2i, 1, 0)$, $t \in \mathbb{C}$.

$$\lambda_3 : \begin{bmatrix} 4 & 2i & 0 \\ 2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ismét a harmadik komponensre vonatkozó egyenlet alapján $z = 0$ és így az első két egyenlet az x, y komponensek közötti összefüggést adja meg, hagyva egy szabad paramétert. Az első komponensre vonatkozó egyenlet alapján $y = 2ix$, látható, hogy ez kielégíti a második egyenletet is! Innen a harmadik sajátvektor $\underline{v}_3 = t(1, 2i, 0)$, $t \in \mathbb{C}$.

10.5. Exercise. Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (4-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)\big((4-\lambda)(4-\lambda) - 1\big) = 0$$

Ennek az egyenletnek egy megoldása biztosan a $\lambda_1 = 2$ a szorzat első tagja alapján, a másik kettőt pedig a $(4-\lambda)^2 - 1 = 0$ egyenletből kaphatjuk meg, ahonnan $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$.
Innen a sajátvektorok rendre:

$$\lambda_1 : \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ismét csak két egyenletet kell megoldanunk, hiszen a második komponensre felírandó egyenlet triviális, csupa nulla együtthatókkal! Az első és harmadik komponensre felírt egyenletek alapján:

$$\begin{aligned} &2x = -4y - z \\ &x + 2y + 2z = 0 \rightarrow= z = 0,\ x = -2y \end{aligned}$$

Innen $\underline{v}_1 = t(-2, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_2 : \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ahonnan ismét az első kettő egyenlet szolgáltatja az összefüggést a három komponens között:

$$\begin{aligned} &x + z = 0 \rightarrow x = -z \\ &y = 0 \end{aligned}$$

Innen a második sajátvektor $\underline{v}_2 = t(1, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_3 : \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ahol ismét először kihasználjuk, hogy a második egyenlet alapján $y = 0$:

$$\begin{aligned} &-x + 4y + z = 0 \\ &y = 0 \rightarrow x = z \\ &x - z = 0 \end{aligned}$$

Innen a második sajátvektor $\underline{v}_3 = t(1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

10.1. Diagonális mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Diagonális mátrixoknál korábban láttuk, hogy azok determinánsa a diagonális elemek szorzatával egyenlő. Ennek okán a karakterisztikus sajátérték egyenlet felírásakor

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\right) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$$

szorzatot kapjuk, ahol a_{ii} az $\underline{\underline{A}}$ mátrix diagonális elemeit jelöli.

10.1. Example. 1. Adott a következő mátrixunk

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}. \tag{10.4}$$

Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{I}\right) = (7-\lambda)(9-\lambda)(11-\lambda) = 0 \tag{10.5}$$

egyenletből rögtön leolvasható a karakterisztikus egyenlet három gyöke: $\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = 11.$

A mátrix alakjából azonnal látszik, hogy milyen szerkezetűek lesznek a sajátvektorok:

$$\lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.6}$$

Ebből a következő három egyenlet adódik

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 0z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ 4z &= 0 \end{aligned}$$

Látható, hogy ez bármilyen x esetén teljesül a $y = 0$ és $z = 0$ megkötés mellett. Így a normált, első sajátértékhez tartozó sajátvektor a

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

Látható, hogy felírva a második és harmadik sajátértékhez tartozó egyenleteket alakra ugyan ilyen egyenleteket kapunk. Így a maradék két sajátvektort (normálva) a következő alakban írhatjuk fel:

$$v_2 = (0, 1, 0)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

10.2. Felső és alsó △ mátrixok

Felső és alsó háromszög mátrixok esetén azok determinánsának kiszámítása ugyan úgy zajlik mint a diagonális mátrixok esetén , tehát a főátlóbeli elemek szorzata adja azt.

10.2. Example.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \text{(kifejtve az első oszlop szerint)} \to \det\big(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{I}\big) = (1{-}\lambda)(5{-}\lambda)(2{-}\lambda) = 0 \tag{10.7}$$

Ismételten a sajátértékeket leolvashatjuk a főátlóból: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 2$. A sajátvektorok esetén - ha azokat a főtálóban fentről lefelé indexeltük meg - azt találjuk *általánosan*, hogy az elsőnek egy eleme különbözik nullától, a másodiknak kettő és a harmadiknak mindhárom eleme véges lesz.

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned} 0x + 2y + 3z = 0 \qquad & \to y = -3/2z, \quad x \in \mathbb{R} \\ 0x + 4y + 3z = 0 \qquad & \to y = 0 \\ 0x + 0y + 1z = 0 \qquad & \to z = 0 \end{aligned}$$

Az első, normált sajátvektor tehát:

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

$$\lambda_2 = 5: \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned} -4x + 2y + 3z = 0 \qquad & \to y = 2x \\ 0x + 0y + 3z = 0 \qquad & \to z = 0 \\ 0x + 0y + -3z = 0 \qquad & \to z = 0 \end{aligned}$$

legyen $x = 1$. Ekkor $y = 2$, az egyenletek alapján pedig $z = 0$, tehát a sajátvektor.

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}}(1, 2, 0)$$

$$\lambda_3 = 2: \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10.10}$$

$$\begin{aligned} -1x + 2y + 3z = 0 \qquad & \to x = -y \\ 0x + 3y + 3z = 0 \qquad & \to y = -z \\ 0x + 0y + 0z = 0 \qquad & \to z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Itt pedig a sajátvketor mindhárom eleme nullától különbözőnek adódott:

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1}}(1, -1, 1)$$

Transzponált mátrixok sajátértékei Itt érdemes megjegyezni, hogy egy mátrix transzponáltjának sajátértékei megegyeznek a nem transzponált mátrix értékeivel.

10.3. Example (Felső hármoszögmátrix transzponáltja)**.** Az előző példában szereplő felső háromszögmátrix transzponáltja egy alsó háromszögmátrixot ad, melynek főátlójában az elemek nem változnak meg, így sajátértékeik megegyeznek.

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{10.11}$$

10.3. Inverz mátrixok

Ha egy mátrix invertálható, tehát zérustól különböző a determinánsa, akkor azon mátrix sajátértékei megegyeznek az eredeti mátrix sajátértékeinek reciprokával, amellett, hogy sajátvektorai nem változnak meg.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}\,\underline{v} &= \lambda \underline{v} \quad \text{Szorozzuk meg mindkét oldalt a mátrix inverzével balról}(\,\underline{\underline{M}}^{-1}\cdot) \\ \mathbb{I}\underline{v} &= \lambda\, \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{v} \\ \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{v} &= \frac{1}{\lambda}\underline{v} \end{aligned}$$

Legegyszerűbb példa erre egy diagonális mátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \to \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{bmatrix}$$

Sajátérvektorai pedig változatlanok maradtak.

Kevésbé triviális példa: Legyen a mátrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus egyenlete: $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$, melynek két megoldása : $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$. Az ezekhez tartozó sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.12}$$

Ez az $x = -y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.13}$$

Ez az $x = y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

Most invertáljuk a mátrixot és végezzük el ugyanezen lépéseket.

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$9\lambda^2 - 12\lambda + 3 = 0 \quad \rightarrow \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 * 3 * 9}}{18} = \frac{12 \pm 6}{18} = 1 \text{ és } 1/3$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.14}$$

Ez az $x = y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

$$\lambda_2 = 1/3: \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{10.15}$$

Ez az $x = -y$ összefüggést eredményezi, tehát a vektor

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

11. Spectrálfelbontás és diagonalizáció

Egy $\underline{\underline{A}}$ diagonalizálható ha létezik olyan $\underline{\underline{P}}$ és $\underline{\underline{P}}^{-1}$ mátrixok melyekre teljesül, hogy

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{P}}^{-1},$$

ahol 'D' egy diagonális mátrix melynek főátlójában az 'A' mátrix sajátértékei találhatóak, a 'P' mátrix pedig az 'A' mátrix sajátvektorait tartalmazza. Elégséges feltétele a diagonalizációnak az, hogy egy $n \times n$ mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van.

11.1. Example. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix karakterisztikus polinomja:

$$0 = -6 - 3\lambda + \lambda^2$$

Ennek leolvashatjuk a megoldásait, amik $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 4$. Ezek ismeretében a 'D' mátrixot a következő alakban írhatjuk fel:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

Most a sajátvektorokból megalkotjuk a 'P' mátrixot:

$$\lambda_1 = 1: \qquad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \to v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

$$\lambda_2 = 3: \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \to v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Ezek ismeretében a 'P' mátrix - a normálási faktorokat itt most elhagyom:

$$\underline{\underline{P}} = (\vec{v_1}\,\vec{v_2}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P}}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Ennek ellenőrzésére:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \tag{11.5}$$

megoldásával történik.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \\
&= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

alternatívaként:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \quad \text{szorozzuk meg 'P' vel jobbról} \\
\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}(I) \quad \text{szorozzuk meg 'P' inverzével balról} \\
\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \mathbb{I}\,\underline{\underline{D}}\mathbb{I} \\
\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{D}}
\end{aligned}$$

A fent említett elégséges feltétel láthatóan nem teljesül tetszőleges mátrixokra. Például egy diagonális mátrix melynek nem mindegyik eleme különbözik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrixnak sajátértékei: 1, 2 és 1, tehát 'D' mátrix megegyezik a diagonalizálandó mátrixxal. A 'P' mátrixok pedig a standard bázisvektorokból épül fel, tehát az $n \times n$ dimenziós egységmátrixxal egyeznek meg.

Ha példaként a

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot vesszük, akkor láthatjuk, hogy sajátértéke degenerált, tehát $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, amikkel ha meghatározzuk a sajátvektorokat (és normáljuk azokat) akkor $v_1 = v_2 = (1, 0)$ vektorokat kapjuk. Nincs két független báziselem, 'P' nem invertálható, így nem tudjuk diagonalizálni a mátrixot.

11.0.1. Mátrix függvények

Ha meg akarjuk határozni egy mátrix egy tetszőleges hatványát, akkor a diagonalizált mátrix felírás megkönnyítheti a dolgunkat. Legyen a mátrixunk most $\underline{\underline{X}}$. Feltéve, hogy X diagonalizálható felírhatjuk azt

$$X = PDP^{-1} \tag{11.6}$$

$$f(X) = X^n \tag{11.7}$$

Legyen most $n = 2$:

$$f(X) = XX = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\mathbb{I}DP^{-1} = PD^2P^{-1} \tag{11.8}$$

Láthatjuk, hogy csak a diagonális résszel kell elvégeznünk a négyzetre emelést, ami annak elemei négyzetre emelésével megkapható. Innen $n = 3$ ugyan így következik:

$$X^3 = X^2X = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2\mathbb{I}DP^{-1} = PD^3P^{-1} \tag{11.9}$$

tetszőleges n esetére pedig:

$$f(X) = PD^nP^{-1} \tag{11.10}$$

Másik példaként ha $\exp(X)$-re lennénk kiváncsiak, akkor definíció szerint:

$$\exp(X) := \sum_{k=0}^{\inf} \frac{1}{k!} X^k \tag{11.11}$$

X helyére beírva annak spektrálfelbontását:

$$\exp\left(PDP^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{\inf} \frac{1}{k!}(PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\inf} \frac{1}{k!} PD^k P^{-1} = P \exp(D) P^{-1} \tag{11.12}$$

legyen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ekkor

$$\exp(D) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^7 \end{bmatrix}$$

12. Taylor sorfejtés

Taylor sornak nevezzük azt a végtelen sort, mely egy valós (vagy komplex) függvény adott pontban meghatározott derivált értékekből állítja elő a függvényt. Legyen $f(x)$ egy valós vagy komplex, differenciálható és folytonos függvény. Ekkor ennek Taylor sora

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \tag{12.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{12.2}$$

ahol a egy tetszőleges pont[4] ahol értelmezhető az $f(x)$ függvény és deriváltja, továbbá $f^{(n)}(x)$ a függvény n-ik derivátját jelöli.

Láthatjuk ha az összegzést csak véges számú derivált értékre végezük el, hogy azok egy polinom formályában közelítik a függvényt

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k \tag{12.3}$$

12.1. Alapvető Taylor sorok

12.1. Example ($\sin(x)$)**.** Határozzuk meg $\sin(x)$ deriváltjait, helyettesítsük be a pontot ami körül sorbafejtjük a függvényt végül alkalmazzuk a fenti Taylor sor összefüggését.

[4]Ha $a = 0$, akkor szokás a Taylor sort Maclaurin sornak is nevezni

$$\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \tag{12.4}$$
$$\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \tag{12.5}$$
$$-\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x} = -\cos(x) \tag{12.6}$$
$$-\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x} = \sin(x). \tag{12.7}$$

Mivel $\sin(0) = 0$ és $\cos(0) = 1$, láthatjuk, hogy a Taylor sor bizonyos tagjai nullát adnak majd. Felírva a definíciót

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \dots \tag{12.8}$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{12.9}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{12.10}$$

12.2. Example ($\cos(x)$)**.** Hasonlóan az előző példához, könnyen felírhatjuk $\cos(x)$ taylor sorát is $a = 0$ körül

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{12.11}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{12.12}$$

12.3. Example (e^x)**.**

$$e^x = e^a \left((x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \right) \tag{12.13}$$
$$= 1 \left((x) + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \dots \right) \tag{12.14}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{12.15}$$

12.4. Example ($\ln(x)$)**.**

$$\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\mathrm{d}^2\ln(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-1}{x^2}; \quad \frac{\mathrm{d}^3\ln(x)}{\mathrm{d}x^3} = \frac{-2}{x^3} \tag{12.16}$$

Válasszuk most a tetszőleges pontot $a = 1$-nek.

$$\ln(x) = \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2!}\frac{-1}{1^2}(x-1)^2 + \dots \tag{12.17}$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-3)^3 + \dots \tag{12.18}$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} \tag{12.19}$$

12.5. Example ($\ln(1-x)$ és $\ln(1+x)$)**.**

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \tag{12.20}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \tag{12.21}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \tag{12.22}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \tag{12.23}$$

12.1. Exercise ($\ln(2+cos(x))$)**.** Határozzuk meg a fenti függvény Taylor sorát másod rendig $a = 0$ körül.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(2+\cos(x)) = \frac{1}{2+\cos(x)}(-\sin(x)) \tag{12.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln(2+\cos(x)) = (-2)\frac{(-\sin(x))^2}{(2+\cos(x))^2} - \frac{1}{2+\cos(x)}(\cos(x)) \tag{12.25}$$

$$\ln(2+\cos(x)) \approx \ln(3) - \frac{1}{3!}x^2 \tag{12.26}$$

A. Óravázlat - 2022-23

Szeptember 09: Matematika ismeretfelmérő megoldása; Deriválás definíció szerint; Alapszabályok; Polinomok és trigonometrikus függvények általános deriválása; Összetett függvénye deriválása. Jegyzet: 1. fejezet

Szeptember 16:

Szeptember 23:

Szeptember 30:

Október 07:

Október 14:

Október 21:

Október 28: Számítási módszerek a fizikában tárgy első nagyZH feladatainak megoldása. Lineáris leképezések mátrixai, Diadikus szorzat. Jegyzet: 6. fejezet

November 05: Permutációk, Valós, négyzetes mátrix determinánsa. Mátrix inverz számítás. 7., 8. fejezet

November 12: Gauss elimináció egyenletrendszerek és mátrix inverz meghatározásra. Mátrix sajátérték és sajátvektor meghatározása. 9 és 10. fejezetek

November 19: Mátrix sajátérték és sajátvektor meghatározása, Spektrálfelontás és diagonalizáció, Mátrixfüggvények. 10 és 11. Fejezetek.

December 02: Taylor sorfejtés és hibabecslés.

[1], [2]

Hivatkozások

[1] Anna Anderegg, 2022, Example 1.

[2] Brenda Bradshaw, 2021, Example 2.