6. kisZH Név: Neptun-kód:

Adott az S sík és annak normálvektora: $\underline{n} = (2, -1, 1)$

(a) Határozd meg az S síkra való vetítés mátrixát és ennek segítségével a $\underline{v_1} = (-2, 1, -1)$ vektor S-re vett vetületét.

(b) Határozd meg az S síkra való tükrözés mátrixát.

$S: \underline{n} = (2, -1, 1)$

a) S-re vetítés mátrixa

$\underline{r} = (x, y, z) = \underline{r}_{\parallel} + \underline{r}_{\perp}$ ($\underline{n}$-re nézve)

$\underline{r}_{\parallel} \downarrow$ $\perp$ a síkra

$\underline{r}_{\perp} \searrow$ $\parallel$-os a síkkal $\rightarrow$ ezt keressük

$$\underline{r}_{\perp} = \underline{r} - \underline{r}_{\parallel}$$

$$\underline{r}_{\parallel} = \frac{\underline{n} \cdot \underline{r}}{\|\underline{n}\|^2} \cdot \underline{n}$$

Kelleni fog 1) $\|\underline{n}\|$; 2) $\|\underline{n}\|^2$; 3) $\underline{n} \cdot \underline{r}$

1)
$$\|\underline{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

3)
$$(2, -1, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + (-y) + z$$

2)
$$\|\underline{n}\|^2 = 6$$

$$\underline{r}_{\parallel} = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\|\underline{n}\|^2} \underbrace{(2x - y + z)}_{\underline{n} \cdot \underline{r}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{n}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4x - 2y + 2z \\ -2x + y - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_{\perp} = \underline{r} - \underline{r}_{\parallel} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4x - 2y + 2z \\ -2x + y - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x + 2y - 2z \\ 2x + 5y + z \\ -2x + y + 5z \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_{\perp} = \underline{r}' = \underline{\underline{A}}\, \underline{r} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \underline{r}$$

ezt az $\underline{\underline{A}}$ mtx-et keressük

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = ? \text{ ha } \underline{x} = \underline{v}_1 = (-2, 1, -1)$$

Mielőtt kiszámítjuk látjuk, hogy $\underline{v}_1 = -\underline{n}$, tehát az $\underline{n}$ normálvektorra nézve

$$\underline{x} = \underline{x}_{\parallel} + \underline{x}_{\perp} = \underline{x}_{\parallel} + \underline{0}$$

hiszen párhuzamos $\underline{v}_1$ vektor $\underline{n}$-el. Emiatt az S-re vett vetülete biztosan 0.

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \overset{-4}{-2\cdot 2} + \overset{2}{2\cdot 1} + \overset{2}{(-1)\cdot(-2)} \\ \overset{-4}{2\cdot(-2)} + \overset{5}{1\cdot 5} + \overset{-1}{(-1)\cdot 1} \\ \overset{4}{(-2)\cdot(-2)} + \overset{1}{1\cdot 1} + \overset{-5}{-1\cdot 5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

b) S-re tükrözés

$\underline{n} = (2, -1, 1)$

$\underline{n}$-re nézve:

$\underline{r} = \underline{r}_\parallel + \underline{r}_\perp \rightarrow \underline{r}' = \underline{r}_\perp - \underline{r}_\parallel = \underline{r} - 2\underline{r}_\parallel \quad (= \underline{r}_\parallel + \underline{r}_\perp - 2\underline{r}_\parallel)$

$\uparrow$ tükrözött vektor

$\underline{r}_\parallel = \dfrac{\underline{n}\,\underline{r}}{\|\underline{n}\|^2} \cdot \underline{n}$ ezt már ismerjük

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4x - 2y + 2z \\ -2x + y - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$$

$\underline{r}' = \underline{r} - 2\underline{r}_\parallel$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4x - 2y + 2z \\ -2x + y - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -x + 2y - 2z \\ 2x + 2y + z \\ -2x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$\underline{r}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{r}$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ez nem volt feladat, de ha a síkra
annak saját normálvektorát tükröznénk
akkor annak (−1) szeresét kapjuk, így ellenőrzésnek jó.

$$\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{n}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \overset{-2}{-1\cdot 2} + \overset{-2}{2\cdot(-1)} + \overset{-2}{(-2)\cdot 1} \\ \overset{4}{2\cdot 2} + \overset{-2}{2\cdot(-1)} + \overset{1}{1\cdot 1} \\ \overset{-4}{-2\cdot 2} + \overset{-1}{(-1)\cdot 1} + 2\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\underline{n} \checkmark$$