Kvantummechanika 1.

Budapest, 2024.

Negatív hullámfüggvény, impulzus?

Egy tisztán negatív hullámfüggvény esetén mekkora az impulzus várható értéke? (f elég sima, és elég gyorsan tart 0-hoz a végtelenben)

$$\hat{p} = -i\hbar\partial_x$$

$$\psi(x) = f(x), \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x : \quad f(x) < 0. \, \langle p \rangle = ?$$

A) 0

B) szigorúan pozitív

C) szigorúan negatív

D) attól függ, milyen f.

Egyszerű hullámfüggvény, impulzus?

Az alábbi hullámfüggvény esetén mekkora az impulzus várható értéke? (f elég sima, és elég gyorsan tart 0-hoz a végtelenben)

$$\hat{p} = -i\hbar\partial_x$$

$$\psi(x) = e^{i\phi} f(x), \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \langle p \rangle =?$$

A) 0

B) szigorúan pozitív

C) szigorúan negatív

D) attól függ, milyen f.

Egyszerű hullámfüggvény, impulzus?

Az alábbi hullámfüggvény esetén mekkora az impulzus várható értéke? (f elég sima, és elég gyorsan tart 0-hoz a végtelenben)

$$\hat{p} = -i\hbar\partial_x$$

$$\psi(x) = e^{ix} f(x), \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \langle p \rangle = ?$$

A) 0

B) szigorúan pozitív

C) szigorúan negatív

D) attól függ, milyen f.

A Schrödinger-egyenlet megoldása az időfüggetlen Schrödinger-egyenlettel

Melyik igaz az alábbi állítások közül a Schrödinger-egyenlet megoldására?

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,t) + V(x,t)\Psi(x,t) \quad \Longrightarrow \Psi(x,t) = \chi(t)\psi(x)?$$

A) Igen, minden megoldás ilyen

B) Ha V nem függ t-től, minden megoldás ilyen.

C) A szorzat alakban írt függvény egy speciális megoldás, ha V nem függ t-től

D) A szorzat alakban írt függvény nem ad megoldást a Schrödinger-egyenletre, csak egy alkalmas bázist

Az energiasajátállapotok tulajdonságai

Mi nem feltétlenül igaz az egydimenziós Schrödinger-egyenletnél szereplő H Hamilton-operátor sajátállapotaira?

A) Nem időfejlődnek, $\psi(x,t)=\psi(x,0)$

B) Az energia mérésekor mindenképp ugyanazt az eredményt adják

C) A különböző energiákhoz tartozó állapotok ortogonálisak egymásra

D) Valós függvényként adhatók meg.

Valós hullámfüggvényben impulzus

Ha egy részecske (normálható) hullámfüggvénye tisztán valós, akkor a p impulzusra ....

$$\forall x : \quad \mathrm{Im}\Psi(x,t) = 0 \quad \Longrightarrow ?$$

A) $\langle p \rangle > 0, \quad \sigma_p > 0$

B) $\langle p \rangle = 0, \quad \sigma_p > 0$

C) $\langle p \rangle = 0, \quad \sigma_p = 0$

D) A fentiek közül egyik sem feltétlenül igaz.

Harmonikus oszcillátor energiasajátállapotai: van-e még több létra?

A léptető operátorokkal megtaláltunk végtelen sok sajátállapotot egy létrán. Van-e még?

$$\psi_n(x) = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} x_0}} e^{-x^2/2x_0^2}}_{\psi_0(x)}$$

Van másik létra?

A) Nem: Csak megszámlálhatóan végtelen sok megoldás van, és azt már kimerítettük

B) Nem: A létra legalsó fokát definiáló differenciálegyenletnek csak egy megoldása van

C) Igen: Vannak más megoldáshalmazok is, amiket még nem találtunk meg

D) Persze, bármely két energiasajátállapot lineárkombinációja is energiasajátállapot.

Léptetőoperátor ∞ mély potenciálgödörben

Mit ad egy harmonikus oszcillátor léptetőoperátora, egy ∞ mély potenciálgödör alapállapotára hatva?

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + i\tilde{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x \cdot + \hbar\partial_x)$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\pi x/L)\Theta(x)\Theta(L-x). \qquad \hat{a}\psi_1(x) = ?$$

A) 0, mármint azonosan 0 függvény

B) az alapállapot maga, csak a normája csökken

C) véges sok sajátállapot szuperpozíciója

D) olyan függvény, ami x=0-ban és x=L-ben nem 0

Melyik operátornak nem 0 a várható értéke?

A harmonikus oszcillátor egy energiasajátállapotában melyik operátor várható értéke nem garantáltan 0?

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)^* \hat{A} \psi_n(x) dx \neq 0, \quad \text{ha} \quad \hat{A} = \dots$$

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{p} = \frac{-ip_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

A) az “a” léptetőoperátor

B) az “x” helyoperátor

C) a “p” impulzusoperátor

D) az “A=xp-px” operátor

Melyik operátornak 0 a várható értéke?

A harmonikus oszcillátor két energiasajátállapotának szuperpozícióját tekintsük! Melyik operátor várható értéke 0?

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_4(x). \quad \left\langle \hat{A} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \hat{A} \psi(x) dx = 0, \quad \text{ha} \quad \hat{A} = \ldots$$

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{p} = \frac{-ip_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

A) az “a” léptetőoperátor

B) az “x” helyoperátor

C) a “p” impulzusoperátor

D) az “p^2” operátor, az impulzusoperátor négyzete

A szórási állapotok...

A) stacionárius állapotok

B) nem stacionárius állapotok,
de lineárkombinációjuk már az

C) megfelelően gondos kísérletben preparálhatóak

D) az impulzusoperátornak sajátállapotai

Melyik példa olyan potenciálra, aminek kötött állapota és szórási állapota is van?

A) harmonikus oszcillátor

B) véges derékszögű potenciálgödör

C) végtelen mély potenciálgödör

D) pozitív forráserősségű Dirac-delta

Megoldások illesztése

Tekintsünk egy lépcsőfüggvény-potenciált, ami x=0-ban felfele ugrik. Itt a hullámfüggvény első deriváltja a két oldalon...

$$V(x) = V_0\Theta(x) \quad V_0 > 0$$

A) $\psi(0_-)' < \psi(0_+)'$

B) $\psi(0_-)' = \psi(0_+)'$

C) $\psi(0_-)' < \psi(0_+)'$

D) Ilyen potenciálra nincs megoldása a Schrödinger-egyenletnek, mert a potenciál határértéke más x→∞ és x → -∞ esetén.

Szuperpozícióban várható érték

Tekintsünk egy kvantumállapotot, ami valamilyen A fizikai mennyiséghez tartozó két sajátállapot egyenlő amplitúdójú szuperpozíciója, a két sajátérték A1 és A2. Az A mennyiség várható értéke...

$$\hat{A}|\psi_j\rangle = A_j|\psi_j\rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$$

A) <A> < A1+A2

B) <A> = A1+A2

C) <A> > A1+A2

D) a fentiek közül bármelyik előfordulhat

Energia értéke két sajátállapot szuperpozíciójában

Tekintsük egy harmonikus oszcillátor két sajátállapotának szuperpozícióját. Megmérve az energiát, melyik fordulhat elő eredményként?

$$|\Psi\rangle = \cos\phi|1\rangle + \sin\phi|5\rangle; \qquad \hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})|n\rangle$$

A) $E = \hbar\omega$

B) $E = 3\hbar\omega/2$

C) $E = 7\hbar\omega/2$

D) A fentiek közül több is előfordulhat.

Energia várható értéke két sajátállapot szuperpozíciójában

Tekintsük egy harmonikus oszcillátor két sajátállapotának szuperpozícióját. Mi nem lehet az energia várható értéke?

$$|\Psi\rangle = \cos\phi|1\rangle + \sin\phi|5\rangle; \qquad \hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})|n\rangle$$

A) $E = 6\hbar\omega$

B) $E = 3\hbar\omega/2$

C) $E = 7\hbar\omega/2$

D) A fentiek közül több érték is tiltott.

Lehet-e két folytonos spektrumú operátor összege diszkrét spektrumú?

Lehet-e két tisztán folytonos spektrumú operátor összege tisztán diszkrét spektrumú? (Segítség: érdemes a harmonikus oszcillátorra gondolni)

A) Igen, konkrét példa:

B) Nem, egyszerű érv:

C) Nem, de úgy már igen, ha a két operátor spektrumának van diszkrét része is

D) Nem, de az összeg-operátor spektrumának lehet diszkrét része is

Lehet-e két diszkrét spektrumú operátor összege folytonos spektrumú?

Lehet-e két tisztán diszkrét spektrumú operátor összege tisztán folytonos spektrumú? (Segítség: érdemes a harmonikus oszcillátorra gondolni)

A) Igen, konkrét példa:

B) Nem, egyszerű érv:

C) Nem, de úgy már igen, ha a két operátor spektrumának van folytonos része is

D) Nem, de az összeg-operátor spektrumának lehet folytonos része is

3D Schrödinger-egyenlet energiasajátállapotai: degenerációs fok

Tekintsünk egy V(r)=V(x)+V(y)+V(z) potenciálban mozgó részecskét! Az alapállapot nemdegenerált. Az 1. gerjesztett állapot 3x degenerált. A 2. gerjesztett állapot…

A) Nemdegenerált

B) 3-szorosan degenerált

C) 6-szorosan degenerált

D) 3-szorosan vagy 6-szorosan degenerált

Perdületoperátor

A határozatlansági reláció miatt L_x és L_y nem vehet fel egyszerre éles értéket, kivéve, ha $\langle L_z \rangle = 0$.
Mi van ebben az esetben?

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \qquad \sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$

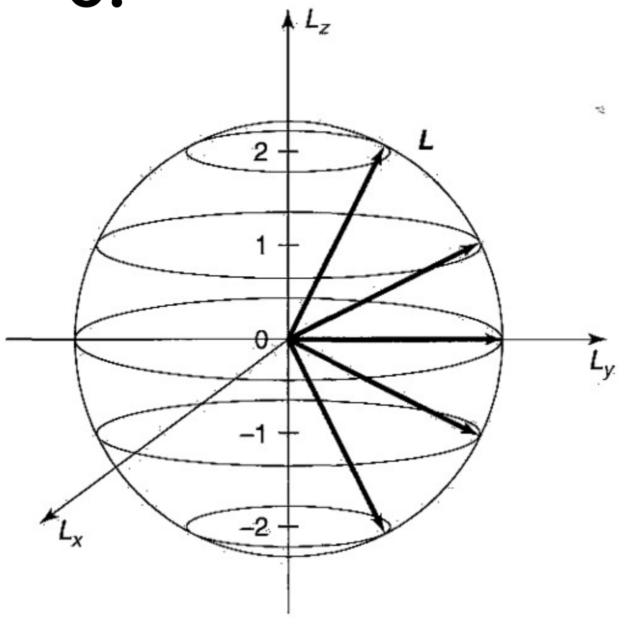

FIGURE 4.9: Angular momentum states (for $l = 2$).

A) Ekkor sem

B) Ekkor igen, de csak ha L^2 sajátértéke is 0

C) Ekkor igen, bármilyen L^2 sajátértéknél

D) Ez az eset nem lehetséges

Perdület-léptető operátor sajátállapota

A harmonikus oszcillátor lefele léptető operátorának sajátállapotai a koherens állapotok.
A perdület lefele léptető operátorának mik a sajátértékei, sajátállapotai?

A) Nincs sajátállapot, mert $(\hat{L}_-)^l = 0$

B) Csak az m=-l -es állapotok, mert $(\hat{L}_-)^{2l+1} = 0$

C) Sajátérték minden komplex szám, sajátállapotok a perdület koherens állapotai

D) Nincs sajátállapot, mert az $\hat{L}_-$ operátor nem önadjungált

Végtelen mély potenciálgödör felében eltoljuk az energiát. Perturbáció hatása?

Végtelen mély potenciálgödör felében V-vel megemeljük a potenciált felfele. Mi ennek a hatása 1. rendben?

A) Minden energiaszint felfele tolódik V-vel

B) 1. rendben nincs hatás, mert az energiasajátállapotok ortogonálisak

C) Minden energiaszint felfele tolódik V/2-vel

D) Csak a páros energiaszintek tolódnak el

Végtelen mély potenciálgödör felében eltoljuk az energiát. Perturbáció hatása?

Végtelen mély potenciálgödör felében V-vel megemeljük a potenciált felfele. Mi ennek a hatása 2. rendben?

A) Alapállapot felfele tolódik

B) 1. gerjesztett állapot felfele tolódik

C) Minél magasabb gerjesztett állapotokat nézünk, annál nagyobb a 2. rendű energia-eltolódás

D) Nincs 2. rendű korrekció.

Végtelen mély potenciálgödör felében eltoljuk az energiát. Perturbáció hatása?

Végtelen mély potenciálgödör felében V-vel megemeljük a potenciált felfele. Mi ennek a hatása 2. rendben?

A) Alapállapot felfele tolódik

B) 1. gerjesztett állapot felfele tolódik

C) Minél magasabb gerjesztett állapotokat nézünk, annál nagyobb a 2. rendű energia-eltolódás

D) Nincs 2. rendű korrekció.