Relativitáselmélet feladatok 2.

1. feladat: Mutassuk meg, hogy amennyiben feltesszük, hogy a $\beta = \frac{v}{c}$ dimenziótlan "sebesség" és a θ sebességparaméter (vagy rapiditás) közötti összefüggés $\beta = f(\theta)$ alakú akkor a

$$f(\theta_1 + \theta_2) = \frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{1 + f(\theta_1)f(\theta_2)}, \qquad f(d\theta) = d\theta + \dots$$

feltételek egyértelmű megoldása $\beta = \tanh\theta$!

2. feladat: Legyen

$$B_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix}, \qquad -\infty < \theta < \infty$$

az (x^1x^4) sík által meghatározott (x^1 irányú) "boost"! Hasonlóan definiálhatjuk az (x^2x^4) és (x^3x^4) síkok által meghatározott $B_2(\theta), B_3(\theta)$ boostokat. Tekintsük továbbá a már ismerős $R_1(\varphi), R_2(\varphi), R_3(\varphi)$, megfelelő síkokban történő, forgatásokat! Például az (x^1x^2) síkban történő (x^3 tengely körüli) forgatás

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Megjegyzés: Legyenek a megfelelő 4×4-es mátrixok: forgatások esetén $\mathcal{L}_j$, boostok esetén $\mathcal{K}_j, j = 1, 2, 3$.

A: Határozzuk meg az $\mathcal{L}_j$ és $\mathcal{K}_j$ infinitezimális generátorok kommutációs relációit!

B: A forgatások esetén ismeretes, hogy az $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ Lie-algebrát az $L_j = \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} x_k \partial_l$ differenciál operátorokkal is realizálhatjuk ($x_k = x^k$ és $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$). Hogyan kell differenciál operátorokkal realizálnunk a boostokkal kapcsolatos K_j mennyiségeket?