| MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz) | Nagy ZH 1 (ápr 1.) |
|---|---|

Név:________________________

Neptun:______________________

**1.) Feladat**

Adott az alábbi téridő-transzformáció:

$$\Lambda^{\mu}_{.\nu} = \begin{pmatrix} 5/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.) Mutassa meg, hogy ez egy Lorentz-transzformáció!

b.) Tekintse a $q^{\mu} = (1,1,0,0)$ négyesvektort. Adja meg ennek Minkowski-hossznégyzetét!

c.) Számítsa ki a $q'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{.\nu} q^{\nu}$ transzformált négyesvektor komponenseit!

d.) Adja meg a $q'^{\mu}$ transzformált négyesvektor Minkowski-hossznégyzetét!

e.) Tekintsen egy űrhajót, ami az eredeti inerciarendszerben *z* irányban mozog *V* szokásos sebességgel! Adja meg az űrhajó $u^{\mu}$ négyes-sebesség vektorát!

f.) Adja meg az $u'^{\mu}$ transzformált négyessebesség vektort!

g.) Mekkorának válasszuk az eredeti rendszerben *V*-t, hogy a mozgó rendszerben az űrhajó szokásos sebessége zérus legyen?

**2.) Feladat**

Egy müonokból álló nyalábot homogén elektromos térrel szeretnénk lefékezni. Az elektromos térerősség *E*, a müonok töltése *e*, tömege *m*. A müonok fékezés előtti sebessége $v_0=0{,}8c$ és a $+x$ irányba mutat. Az elektromos térerősség szintén a $+x$ irányba mutat, ezért fékezi az $e<0$ töltésű müonokat, amik egy egyenes pályán mozognak. A fékezés kezdőpillanata jelöli ki a t=0 időpontot.

a.) Írja fel a müonok relativisztikus mozgásegyenletét!

b.) Adja meg a müonok *x* irányú $p_x(t)$ impulzusát az idő függvényében!

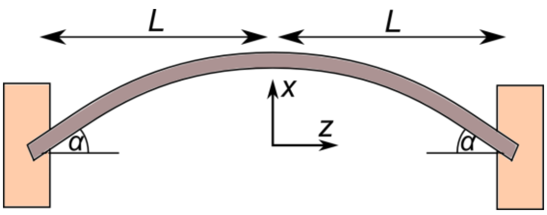
c.) Adja meg azt a $t_f$ időpontot, amikor a müonok megállnak.

d.) A $p_x(t)$ függvény ismeretében adja meg a müonok $v_x(t)$ (szokásos) sebességét!

e.) Írja fel a müonok sajátidejének fékezés alatti $\tau_f$ megváltozását megadó integrált!

f.) Számítsa ki a müonok sajátidejének $\tau_f$ megváltozását a fékezés alatt!

**3.) Feladat**




Egy könnyű (elhanyagolható tömegű), 2*L* hosszúságú rúd két végét befalaztuk az ábrának megfelelő módon: a két furat a vízszintessel kicsiny $\alpha \ll 1$ szöget zár be. A rúd keresztmetszeti tényezője $\Theta$, Young-modulusa *E*. A z tengely vízszintes, a rúd függőleges kihajlását a $\chi(z)$ függvénnyel jellemezzük. A rúd két végpontja a $z = \pm L$ pontokban van, azonos magasságban.

a.) Írja fel a rúd alakját meghatározó (negyedrendű) differenciálegyenletet!

b.) Adja meg az egyenlet általános megoldását.

c.) Adja meg a rúd végeinél érvényes peremfeltételeket!

d.) Adja meg a peremfeltételeknek is megfelelő megoldást!

e.) Milyen magasan van a rúd $z=0$ középpontja a rúd végeihez képest?

f.) Adja meg a rúdban ébredő $M(z)$ hajlítónyomatékot!

**4.) Feladat**

Adott egy klasszikus valós mező, $\phi(x,t)$ melynek dinamikáját az alábbi Lagrange-sűrűség határozza meg,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t \phi(x,t)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_x \phi(x,t)\right)^2 + \cos\left(\phi(x,t)\right) - 1 \quad .$$

a.) Adja meg a mező Euler-Lagrange mozgásegyenleteit!
b.) Írja fel az energiasűrűség általános kifejezését a modellben!
c.) Adja meg az energiaáram általános kifejezését a modellben!
*d.)* Mutassa meg, hogy az alábbi időfüggetlen megoldás kielégíti a mozgásegyenletet:

$$\phi_1(x,t) = 4\arctan\left(e^x\right) .$$

*Megj.: Ezt álló szoliton megoldásnak nevezzük.*

Segítség: $$\sin(4\arctan y) = 4\frac{y - y^3}{(1+y^2)^2}$$

e.) Adja meg a $\phi_1(x \to \infty)$ és $\phi_1(x \to -\infty)$ határértékeket! Rajzolja fel a $\phi_1(x)$ függvényt!
f.) Mutassa meg, hogy az alábbi időfüggő megoldás is megoldja az mozgásegyenleteket,

$$\phi_2(x,t) = 4\arctan\left(e^{\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}}\right).$$

*Megj.: Ezt v sebességgel haladó szoliton megoldásnak nevezzük.*

g.) Adja meg az energiasűrűséget a $\phi_2$ megoldás esetén *x* és *t* függvényében!

Segítség: $$\cos(4\arctan y) = 1 - 8\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

h.) Adja meg az energiaáramot a $\phi_2$ megoldás esetén *x* és *t* függvényében!

-----------------------------------------------------------------------------------------

i.) **BÓNUSZ!!! Plusz pontért:** Rajzolja fel (vázolja) a g.)-ben kapott energiasűrűséget és a h.)-ban kapott energiaáramot *x* függvényében a *t=0* időpillanatban!
j.) **BÓNUSZ!!! Plusz pontért:** Mutassa meg közvetlen behelyettesítéssel, hogy a g.) és h.) feladatokban kapott energiasűrűség és energiaáram teljesíti az energiára vonatkozó kontinuitási egyenletet!
k.) **BÓNUSZ!!! Plusz pontért:** Az energiasűrűség integrálásával adja meg a $\phi_2$ megoldás teljes energiáját!
l.) **BÓNUSZ!!! Plusz pontért:** Mutassa meg, hogy az a.)-ban kapott mozgásegyenletek Lorentz-invariánsak. Ehhez a következő lépéseket kell végrehajtania:
- Tegye fel, hogy a $\phi(x,t)$ függvény megoldása a mozgásegyenleteknek.
- Mutassa meg, hogy ekkor $\psi(x,t) = \phi(x'(x,t), t'(x,t))$ is megoldás, ahol

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}$$

Mekkora a „fénysebesség” a modellben?