| MECHANICS 2 (2017/18 spring) | HW 7 |
|---|---|

# Small test problems

**HW7/1**

Consider a very long elastic rod with mass density $\rho$, Young's modulus E, and cross-section A. The rod lies on the x axis. One end of the rod is in the origin (x=0), the other end is far away, practically in the infinity ($x \to \infty$). The longitudinal waves in the rod are described by the Lagrangian density

$$L = \frac{\rho A}{2}\left(\partial_t \xi(x,t)\right)^2 - \frac{EA}{2}\left(\partial_x \xi(x,t)\right)^2 ,$$

where the field $\xi(x,t)$ describes the longitudinal displacement of the points of the rod.

a.) Write down the Euler-Lagrange equation of motion for the system.

b.) We excite the rod by moving its end (x=0) as $\xi(0,t) = a \sin \omega t$. Show directly that following plane-wave solution solves the equations of motion:

$$\xi(x,t) = a \sin(\omega t - kx).$$

Determine the value of $k$ as a function of ω.

c.) Starting from the Lagrangian, derive the expression for the energy density $\varepsilon$, and the energy current $j_\varepsilon$. *(Use the law of energy conservation, similarly to the problems in class.)*

*d.)* Determine the average power of the generator that excites the rod. *(Hint: calculate the total transmitted energy in one period $T = 2\pi/\omega$)*

---

**HW7/2**

Consider the bending waves in an elastic rod. As it has been discussed in class, the bending energy is proportional to the square of the curvature of the rod, therefore the Lagrangian of the system is

$$L = \frac{\lambda}{2}\left(\partial_t \psi(x,t)\right)^2 - \frac{E\Theta}{2}\left(\partial_x^2 \psi(x,t)\right)^2,$$

where λ is the linear mass density (mass per unit length), E is the Young's modulus of the rod, and Θ is the cross-section parameter. The field $\psi(x,t)$ describes the small transversal displacement of the rod.

a.) Determine the Euler-Lagrange equation of motion for the system. Be careful with the second-derivative term.

b.) Starting from the Lagrangian, determine the energy density in the model.

c.) Determine the expression of energy current in the model.
*(Try to follow the way of the class: calculate the time-derivative of the energy density, and use the equations of motion to transform it into a total x-derivative. In this case the energy current is a sum of two different terms.)*

# KisZh-án szerepelhető feladatok

**HF7/1**

Tekintsen egy igen hosszú rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullámokat. A rúd sűrűsége $\rho$, Young modulusza E, keresztmetszete A. A rúd az x tengely mentén fekszik, az egyik vége az origóban (x = 0) található, a másik vége praktikusan végtelen messze van ($x \to \infty$) A rendszerben terjedő longitudinális hullámokat az alábbi Lagrange-sűrűséggel írjuk le

$$L = \frac{\rho A}{2}\left(\partial_t \xi(x,t)\right)^2 - \frac{EA}{2}\left(\partial_x \xi(x,t)\right)^2,$$

ahol a $\xi(x,t)$ mező a rúd pontjainak hosszirányú elmozdulásait írja le.

a.) Adja meg a rendszer Euler-Lagrange mozgásegyenletét.

b.) A rúd x=0 pontban lévő végét gerjesztjük, ezért $\xi(0,t) = a\sin\omega t$. Direkt behelyettesítéssel mutassa meg, hogy az alábbi megoldás megfelel a mozgásegyenleteknek $\xi(x,t) = a\sin(\omega t - kx)$.
Adja meg a $k$ értéket az ω függvényében.

c.) A Lagrange-sűrűség alakjából kiindulva adja meg az $\varepsilon$ energiasűrűség, és a $j_\varepsilon$ energiaáram kifejezését *(A gyakorlaton látotthoz hasonlóan használja az energiamegmaradás törvényét)*

*d.)* Adja meg a gerjesztést leadó generátor átlagos teljesítményét *(<u>Segítség:</u> számítsa ki a rúdban továbbított energiát egy periódus alatt. ($T = 2\pi/\omega$))*

---

**HF7/2**

Tekintsen egy rúdban terjedő hajlítási hullámokat. Ahogy az órán láttuk, a hajlítási energia arányos a rúd görbületének négyzetével ezért a rendszer Lagrange-sűrűsége az alábbi alakú

$$L = \frac{\lambda}{2}\left(\partial_t \psi(x,t)\right)^2 - \frac{E\Theta}{2}\left(\partial_x^2 \psi(x,t)\right)^2,$$

ahol λ a rúd lineáris tömegsűrűsége (tömeg per hosszegység), E a Young modulus, és Θ a keresztmetszeti tényező. A $\psi(x,t)$ mező a rúd kicsiny transzverzális kitéréseit írja le.
displacement of the rod.

a.) Adja meg a rendszer Euler-Lagrange mozgásegyenletét Legyen óvatos a második deriváltat tartalmazó taggal.

b.) A Lagrange-sűrűség alakjából kiindulva adja meg az $\varepsilon$ energiasűrűség kifejezését.

c.) Adja meg az energiaáram kifejezését a modellben.
*(Próbálja követni az órán látott eljárást. Határozza meg az energiasűrűség időderiváltját, majd a mozgásegyenlet felhasználásával alakítsa át ezt egy teljes x-deriválttá. Az energiaáram ebben az esetben két tag összegeként áll elő.)*