Small test problems

HW6/1

In this problem you will show that the basic equation of electrostatics (the Poisson-equation) can be deduced using a variational principle. Consider the stationary (time-independent) charge density $\rho(\mathbf{r})$, whose electrostatic energy is described by the following functional

$$U = \int d^3r \left(\frac{-\varepsilon_0}{2} \left(\nabla \phi(\vec{r}) \right)^2 + \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \right)$$

$$= \int d^3r \left(\frac{-\varepsilon_0}{2} \left(\left(\partial_x \phi(\vec{r}) \right)^2 + \left(\partial_y \phi(\vec{r}) \right)^2 + \left(\partial_z \phi(\vec{r}) \right)^2 \right) + \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \right),$$

where $\phi(\mathbf{r})$ denotes the electrostatic potential from which the electric field can be determined by $E = -\nabla\varphi$.

The variational principle states that the electricstatic field minimizes the electrostatic energy. The boundary conditions usually are described by $\varphi(r \to \infty) = 0$, i.e. the potential is zero in the infinity.

a.) Assuming that we change the potential by the infinitezimal variation $\delta\varphi(r)$ write down the variation δU of the energy functional.

b.) After integrating by parts transform the variation δU in a form $\delta U = \int d^3r \; M(r)\, \delta\varphi(r)$,
i.e. the derivatives of the variation $\delta\varphi(r)$ are not present anymore. Determine $M(\mathbf{r})$ as a function of $\rho(\mathbf{r})$ and $\phi(\mathbf{r})$. Throw out the boundary terms of the partial integration. *(It can be shown that if* $\rho(\mathbf{r})$ *is confined in a finite volume then the boundary terms are exactly zero.)*

c.) The energy is minimal, if δU is zero for any variation. It is equivalent with the equation $M(\mathbf{r}) = 0$. Show that this equation is exactly the Poisson-equation of electrostatics.

HW6/2

The Lagrangian of a one dimensional system reads as

$L = \frac{1}{2}(\partial_t\psi)(\partial_x\psi) + \frac{\alpha}{6}(\partial_x\psi)^3 - \frac{\nu}{2}(\partial_x^2\psi)^2,$

where the field $\psi(x,t)$ describes some continous medium.

a.) Write down the action of the system.

b.) Determine down the variation δS.

c.) After integrating by parts transform the variation in the form

$$\delta S = \int \mathrm{dt} \int \mathrm{dx}\, M(x,t)\delta\psi(x,t)$$

Determine $M(x,t)$ as a function of ψ and its derivatives. Throw out the boundary terms.

d.) Determine the expression for the energy density,

$$\varepsilon = \partial_t\psi \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\psi)} - L$$

Problems for practice

Pr6/1

The Lagrangian of a homogeneous, isotropic, and elastic medium is described by

$L = \frac{\rho}{2}(\partial_t s)\cdot(\partial_t s) - \frac{\lambda}{2}(\partial_x s_x + \partial_y s_y + \partial_z s_z)^2 - \mu\big((\partial_x s_x)^2 + (\partial_y s_y)^2 + (\partial_z s_z)^2\big),$

where $s(r,t) = \big(s_x(r,t), s_y(r,t), s_z(r,t)\big)$ is the field that describes the displacement of the medium, the mass density is ρ, λ and μ are the Lamé parameters of the medium.

a.) Write down the action of the system.
b.) Derive the equations of motion for the system.
c.) Show that the following plane-wave expression solves the equations: $s(r,t) = s_0 e^{i(k\cdot r - \omega t)}$
d.) By inserting the solution of c.) in the equations of motion, show that the connection between $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{k}$ és ω reads as
$\underline{\underline{M}}(\omega,k)\underline{s_0} = \underline{0}$.
Determine the matrix $\underline{\underline{M}}(\omega,\vec{k})$.
e.) Let the wave propagate in the x direction, i.e. $\vec{k} = (k,0,0)$. Determine the matrix M in this special case.
The equation in d.) can only be solved if the determinant of the matrix M is zero. Using the special form in e.), determine the possible $\omega(k)$ dispersion relations.
f.) Determine the $\overrightarrow{s_0}$ amplitude vectors for the different $\omega(k)$ solutions. What kind of polarizations appear?

Pr6/2

Consider the following Lagrangian:

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m}\big(\partial_x\psi^*(x,t)\big)\big(\partial_x\psi(x,t)\big) - V(x)\psi^*(x,t)\psi(x,t) + \frac{1}{2}i\hbar(\psi^*(x,t)\partial_t\psi(x,t) - \psi(x,t)\partial_t\psi^*(x,t),$$

where $\psi(x,t)$ is a complex valued field, and $\psi^*(x,t)$ denotes its complex conjugate. There are many ways to handle complex fields. Now we follow the most pedestrian way: we describe the field as a combination of two independent real fields.

a.) Consider the complex field as a real field with two-components (the real and the imaginary part.)
$\psi(x,t) = \varphi_1(x,t) + i\,\varphi_2(x,t)$.
Here $\phi_1(x,t)$ és $\phi_2(x,t)$ are standard real fields.
Rewrite the Lagrangian in the terms of these two real fields.
b.) Show that the Lagrangian is real (no complex factors are present).
c.) Write down the action using the real form of the Lagrangian.
d.) Derive the equations of motion for the two fields, ϕ_1 and ϕ_2.
e.) Show that the two equations are the real and imaginary parts of the usual Schrödinger equation
$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$.

Pr6/3

A soap-membrane is streched on a square shaped frame of size L. In this problem we consider the standing wave modes of the membrane. The surface mass density of the membrane is λ, the surface tension is σ. The Lagrangian of the membrane reads as

$$L = \frac{1}{2}\lambda(\partial_t u)^2 - 2\sigma\sqrt{1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2},$$

where $u(x,y,t)$ is the vertical displacement of the membrane. The first term is the surface density of kinetic energy, while the second term stands for the surface energy density of the membrane.

a.) Approximate the square-root term in the Lagrangian up to orders of $(\partial u)^2$

b.) Derive the equations of motion (from the approximated Lagrangian).

Because of the boundary conditions, at the frame the displacement is zero, $u(0,y,t) = u(x,0,t) = u(L,y,t) = u(x,L,t) = 0$.

c.) Search the standing-wave solutions in the form

$$u(x, y, t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t + \phi).$$

What are the possible values of k_x and k_y that are allowed by the boundary conditions?

d.) Determine the frequency ω as a function of the wave numbers k_x and k_y.

KisZh-án szerepelhető feladatok

HF6/1

Ebben a feladatban a célunk megmutatni, hogy az elektrosztatika alapegyenlete, a Poisson-egyenlet levezethető variációs elvből. Egy $\rho(\mathbf{r})$, időben állandó elektromos töltéseloszlás által létrehozott elektromos tér energiája az alábbi integrállal fejezhető ki: $U = \int d^3r \left(-\frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\varphi(r))^2 + \rho(r)\varphi(r)\right) = \int d^3r \left(-\frac{\varepsilon_0}{2}\left((\partial_x\varphi(r))^2 + (\partial_y\varphi(r))^2 + (\partial_z\varphi(r))^2\right) + \rho(r)\varphi(r)\right.$,
ahol $\phi(\mathbf{r})$ az elektromos potenciál, melyből az elektromos térerősség az $E = -\nabla\varphi$ formulával számítható.

Az állítás az, hogy a kialakult elektromos tér olyan, hogy az minimalizálja a fenti energia funkcionált. A határfeltételt úgy szokás felvenni, hogy $\varphi(r \to \infty) = 0$, azaz a potenciál nulla szintjét a végtelenben vesszük fel.

a.) Feltéve, hogy a potenciálfüggvényt a $\delta\varphi(r)$infinitezimális függvénnyel variáltuk, írja fel az U energiafunkcionál δU variációját!

b.) Parciális integrálás segítségével érje el, hogy a $\delta\varphi(r)$ variáció deriváltjai már ne jelenjenek meg a kifejezésben, azaz hozza a funkcionál variációját az alábbi alakra: $\delta U = \int d^3r\ M(r)\ \delta\varphi(r)$!
Adja meg az $M(\mathbf{r})$ függvény kifejezését $\rho(\mathbf{r})$ és $\phi(\mathbf{r})$ segítségével! A parciális integrálás felületi tagjait dobja el! *(Megj: A felületi tagokról megmutatható, ha $\rho(\mathbf{r})$ csak egy véges térfogatban nem nulla, úgy eldobhatóak.)*

c.) Az energia minimális, ha δU eltűnik tetszőleges variációra. Ez ekvivalens az $M(\mathbf{r}) = 0$ egyenlettel. Mutassa meg, hogy ez éppen az elektrosztatika Poisson-egyenlete!

HF6/2

Egy egydimenziós folytonos közeg Lagrange sűrűsége az alábbi alakú: $L = \frac{1}{2}(\partial_t\psi)(\partial_x\psi) + \frac{\alpha}{6}(\partial_x\psi)^3 - \frac{\nu}{2}(\partial_x^2\psi)^2$,
ahol a $\psi(x,t)$ mezővel írjuk le a közeget.

a.) A Lagrange-sűrűség segítségével írja fel az S hatás funkcionált!

b.) Írja fel a hatás δS variációjának kifejezését!

c.) Parciális integrálások segítségével érje el, hogy a hatás variációja az alábbi alakú legyen: $\delta S = \int \mathrm{dt} \int \mathrm{dx}\, M(x,t)\delta\psi(x,t)$!
Fejezze ki M(x,t) függvényt a ψ mező és deriváltjainak segítségével! A megjelenő peremtagokat dobja ki!

d.) Írja fel az energiasűrűség kifejezését a modellben!

$$\varepsilon = \partial_t\psi\frac{\partial L}{\partial(\partial_t\psi)} - L$$

Gyakorlófeladatok

Gy6/1

Egy homogén izotrop rugalmas közeg Lagrange-sűrűsége az alábbi alakú:

$L = \frac{\rho}{2}(\partial_t s)\cdot(\partial_t s) - \frac{\lambda}{2}(\partial_x s_x + \partial_y s_y + \partial_z s_z)^2 - \mu\big((\partial_x s_x)^2 + (\partial_y s_y)^2 + (\partial_z s_z)^2\big)$,

Ahol $s(r,t) = \big(s_x(r,t), s_y(r,t), s_z(r,t)\big)$ a közeg elmozdulás-mezője, ρ a sűrűség, λ és μ pedig a Lamé-állandók.

a.) Írja fel a közegre a hatás-funkcionált!

b.) Adja meg a közeg Euler-Lagrange féle mozgásegyenleteit!

c.) Mutassa meg, hogy $s(r,t) = s_0 e^{i(k\cdot r - \omega t)}$ síkhullám megoldások megoldják a mozgásegyenletet!

d.) Behelyettesítve a c.)-ben szereplő próbafüggvényt a mozgásegyenletbe a következő alakú összefüggést nyeri $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{k}$ és ω között:

$$\underline{\underline{M}}(\omega, k)\underline{s_0} = \underline{0}$$

Adja meg az M mátrixot!

e.) Haladjon a síkhullám a +x irányba, k nagyságú hullámszámvektorral! Adja meg ebben a speciális esetben is az M mátrixot!

f.) A d.)-ben szereplő egyenletnek csak akkor lehet nemzérus megoldása s_0-ra, ha a mátrix determinánsa 0. Ez alapján milyen lehetséges ω(k) összefüggéseket kap?

g.) Milyenek a lehetséges s_0 vektorok?

Gy6/2

Tekintse az alábbi Lagrange-sűrűséget:

$L = -\frac{\hbar^2}{2m}\big(\partial_x\psi^*(x,t)\big)\big(\partial_x\psi(x,t)\big) - V(x)\psi^*(x,t)\psi(x,t) + \frac{1}{2}i\hbar(\psi^*(x,t)\partial_t\psi(x,t) -$
$\psi(x,t)\partial t\psi*(x,t)$,

Ahol ψ(x,t) egy komplex értékeket felvevő mező, $\psi^*(x,t)$ a mező komplex konjugáltját jelöli. Előadáson ebből úgy vezették le a mozgásegyenletet, hogy a mezőt és annak komplex konjugáltjának variációját függetlennek tekintették (azaz egyszer variáltak δψ szerint úgy, hogy *ψ(x,t)*-t változatlanul hagyták, egyszer pedig *δψ* szerint úgy, hogy $\psi^*(x,t)$-t hagyták változatlanul.) Ez a módszer elsőre nagyon furcsa, ezért érdemes megoldani gyalogosabb módon is a feladatot.

a.) Kezelje a komplex hullámfüggvény valós és képzetes részét, mint egy két komponensű mezőt:

$\psi(x,t) = \varphi_1(x,t) + i\,\varphi_2(x,t)$,

ahol $\phi_1(x,t)$ és $\phi_2(x,t)$ már tisztességes valós függvények.

Írja át a Lagrange-sűrűséget úgy, hogy benne ezek a valós mezők szerepeljenek!

b.) Mutassa meg, hogy a kapott Lagrange-sűrűség tisztán valós!

c.) Írja fel a hatás funkcionált!

d.) Írja fel az Euler-Lagrange egyenleteket amiket a ϕ_1 és ϕ_2 szerinti variálás után kapott.

e.) Mutassa meg, hogy a két egyenlet amit kapott, a szokásos:

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

alakú Schrödinger egyenlet valós és képzetes része!

Gy6/3

Egy L oldalú négyzet alakú fémkeretre szappanhártyát feszítettünk ki. Ebben a feladatban a célunk a szappanhártya állóhullám módusainak meghatározása. A szappanhártya felületi tömegsűrűségét jelölje λ, a felületi feszültségét pedig σ!

A szappanhártya Lagrange-sűrűsége:

$$L = \frac{1}{2}\lambda(\partial_t u)^2 - 2\sigma\sqrt{1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2},$$

ahol u(x,y,t) a szappanhártya fémkeretre merőleges irányú kitérését jelöli. Az első tag a kinetikus energia járulék, a második a szappanhártya felületi energiájából származó járulék.

a.) Közelítse a Lagrange-sűrűségben szereplő gyökös tagot a deriváltakban másodrendig!

b.) Írja fel az Euler-Lagrange féle mozgásegyenleteket!

A peremfeltételünk szerint a négyzetes keret pontjaiban az u(x,y,t) függvény zérus, azaz *u(0,y,t) = u(x,0,t) = u(L,y,t) = u(x,L,t) = 0.*

c.) Keresse a mozgásegyenletek állóhullám-megoldásait az alábbi alakban:
$u(x, y, t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t + \phi)$!
Mik a k_x és k_y hullámszámok peremfeltételek által megengedett lehetséges értékei?

d.) Adjuk meg a k_x és k_y hullámszámokkal jellemzett módus ω körfrekvenciáját!
