Small test problems

HW5/1

During your introductory physics classes you learned about Pascal's law that states: in a resting fluid the pressure is isotropic, i.e. the pressing force on a test surface does not depend on the direction of the surface.

This law can be reformulated after the introduction of the stress tensor. We know that in a resting fluid there are no shearing stresses, because the shearing stress is proportional to the derivates of the velocity field: in rest the velocity is zero leading to zero shearing stress.

Pascal's reformulated law therefore reads as the following: if in a medium there are no shearing stresses then the stress tensor is proportional to the unit matrix. In this problem you have to prove this theorem, using an indirect proof.

First assume that the stress tensor is diagonal (there are no shearing stresses), but the diagonal elements are not equal.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

For example let's suppose that $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$.

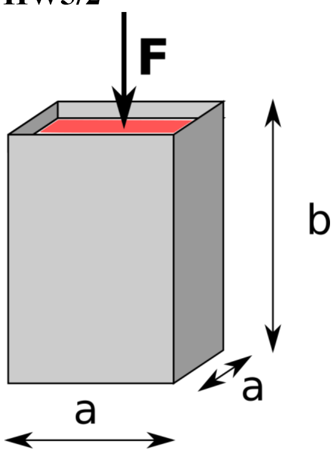
a.) Write down the matrix that rotates the coordinate system around the z axis by an angle of α.

b.) Determine the elements of the stress tensor in this rotated coordinate system.

c.) Express the shearing stress σ'_{xy} in this rotated coordinate system, if $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$.

d.) Show that the shearing stress is zero for all the α angles only if $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, meaning that our initial assumptions was wrong.

HW5/2



A light, elastic medium is put in a rigid box. The bottom of the box is a square with side a, while the height of the box is b. The medium does not stick to the walls of the box, only fills it like a jelly. The Lamé parameters of the medium are μ and λ.

We start to push the surface of the medium with an unknown force F, that leads to a prolapse Δb of the surface.

a.) Express the deformation tensor of the medium.

b.) Write down Hooke's law for the medium.

c.) Express the nonzero elements (σ_{xx}, σ_{yy} and σ_{zz}.) of the stress tensor.

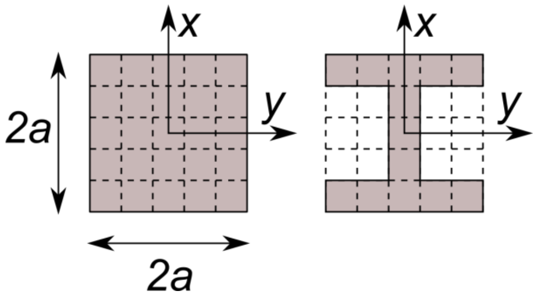
d.) Knowing the prolapse Δb determine the unknown force F.

Problems for Practice

Pr5/1

In the class you saw that in the problem of bending rods the cross-section parameter $\Theta = \int x^2 dA$ is very important. Here the integration is over the cross section of the rod, and x denotes the distance from the neutral surface in the rod.

We made two rods of steel. One has a squared (with side 2a) cross section, while the other has an „I" shaped cross section. (see figure) The width of the parts of the I-shape us 2a/5. (see figure)



a.) Determine the cross-section parameter Θ_{square} for the square. What is $\frac{\Theta_{square}}{A}$ of the square, where A denotes the cross section?

b.) What is the cross-section parameter Θ_I for the „I"-shaped rod? What percentage of Θ_{square} is it?

c.) What is $\frac{\Theta_I}{A}$ for the „I"-shaped rod?

Pr5/2

A rod of length L, cross-section A and mass density ρ is softly fixed to the ceiling. Due to its own weight the rod elongates. In the first part of the problem you must consider this „self-elongation". The Lamé-parameters of the rod are μ and λ.
Let the origin be on the ceiling and let the z axis point vertically down.

a.) Write down the only nonzero element σ_{zz} of the stress tensor as a function of z.

b.) Using Hooke's law express the nonzero elements (ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz}) of the deformation tensor, as a function of z.

c.) Knowing ε_{zz}, determine the displacement s_z of the rods points as a function of z.

d.) What is the rods ΔL elongation?

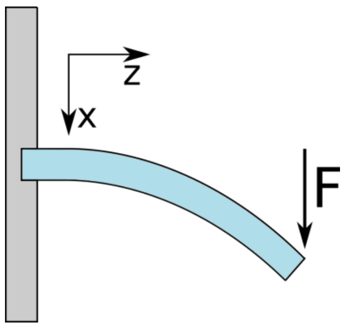
We start to pull down the end of the rod by a force of F. Repeate the calculations of a.)-d.), i.e.

e.) Write down the only nonzero element σ_{zz} of the stress tensor as a function of z.

f.) Using Hooke's law express the nonzero elements (ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz}) of the deformation tensor, as a function of z.

g.) Knowing ε_{zz}, determine the displacement s_z of the rods points as a function of z.

h.) What is the rods ΔL elongation?



Pr5/3

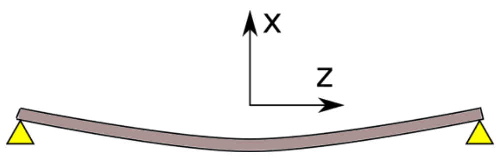
A thin, light rod of length L is fastened to a wall horizontally. The free end of the rod is pushed down with a force F. The mass of the rod is negligible. The horizontal direction is z, the F points in the x direction. The Young's modulus of the rod is E, the cross-section parameter is Θ.

a.) Determine the bending moment in the rod as a function of z.

b.) Write down the differential equation that describes the shape of the rod.

c.) Determine the shape of the rod. What is the prolapse of its free end?

Pr5/4



An elastic plank is laid on two wedges (see figure). The two ends of the plank are at $z = \pm L/2$. The Young's modulus of the plank is E, the cross-section parameter is Θ. The total mass of the plank is m_t .

a.) Determine the forces that act at the two wedges.
b.) Determine the bending moment in the plank as a function of z.
c.) Write down the differential equation for the planks shape.
d.) Solve the differential equation. Use the boundary conditions that the endpoints of the rod are fixed.
e.) What is the prolapse of the midpoint of the plank?

KisZh-án szerepelhető feladatok

HF5/1

Tanulmányai során már nagyon korán találkozott Pascal törvényével, ami kimondja: egy nyugvó folyadékban a nyomás izotrop, azaz a folyadékba helyezett „mérőfelületre" ható nyomóerő független a felület irányától.

Ezt a feszültségtenzor bevezetésével másként is megfogalmazhatjuk. Tudjuk, hogy egy nyugvó folyadékban nyírófeszültségek nem ébrednek, azok ugyanis a sebességmező deriváltjaival arányosak, nyugvó folyadékban pedig minden sebesség zérus.

Pascal törvénye tehát erre az esetre átfogalmazva: Amennyiben egy közegben minden nyírófeszültség eltűnik, úgy a feszültségtenzor arányos az egységmátrixszal. (~ a nyomás izotrop.)

Ebben a feladatban ezt a tételt kell belátnia indirekt bizonyítással.

Tegye fel, hogy a feszültségtenzor diagonális, de a diagonális elemei nem egyenlőek:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

azaz pl. $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$.

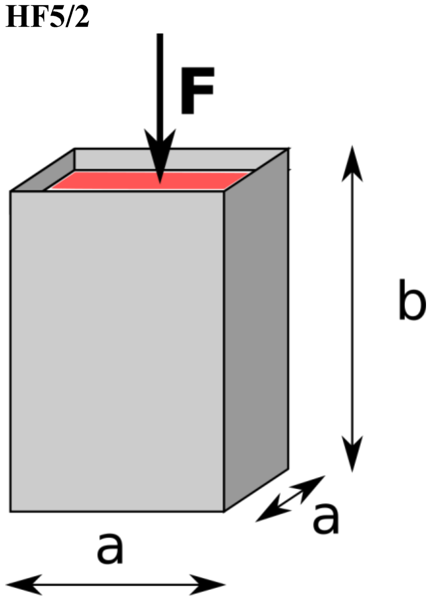
a.) Írja fel azon mátrixot, ami elforgatja a koordinátarendszerünket a z tengely körül valamely α szöggel!

b.) Határozza meg a feszültségtenzor elemeit ebben az α szöggel elforgatott koordinátarendszerben!

c.) Adja meg az új koordinátarendszerben a σ'_{xy} nyírófeszültséget $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$ esetén!

d.) Mutassa meg, hogy tetszőleges α szögű forgatás esetén csak akkor tűnik el a σ'_{xy} nyírófeszültség, ha $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$!

HF5/2



Egy merev dobozba könnyű, rugalmas anyagot töltöttünk. A doboz alapja egy *a* oldalú négyzet, magassága *b*. Az anyag nem tapad a doboz falaihoz, csak zselészerűen kitölti a dobozt a felszínéig. A közeg Lamé-állandói μ és λ.

Felülről egyelőre ismeretlen *F* erővel nyomni kezdjük az anyag felszínét, aminek hatására az Δb magasságnyit benyomódott.

a.) Adja meg a közeg deformációtenzorát!

b.) Írja fel a Hooke-törvényt a közegre!

c.) Fejezze ki a feszültségtenzor zérustól különböző elemeit! (σ_{xx}, σ_{yy} és σ_{zz}.)

d.) Adja meg az ismeretlen F nyomóerőt!

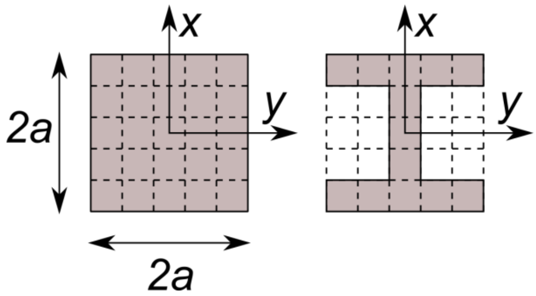
Gyakorló feladatok

GY5/1

Gyakorlaton láthattuk, hogy rugalmas rudak hajlításánál megjelenik a keresztmetszeti tényező, amit az alábbi integrál definiál:

$\Theta = \int x^2 dA$,

ahol az integrálás a rúd keresztmetszetére történik, *x* a keresztmetszet pontjainak a neutrális felülettől mért távolsága. (A neutrális felület szimmetrikus kereszmetszetű rudak esetén éppen „középen" van.)



Két rudat hoztunk létre acélból. Az egyik tömör négyzetes keresztmetszetű, a másik pedig „I"-alakú, ahogy az ábra is mutatja. Az I szára és két fedlapja is *2a/5* vastagságú.

a.) Számítsa ki a négyzetes keresztmetszetű rúd $\Theta_{négyzet}$ keresztmetszeti tényezőjét!
b.) Adja meg a négyzetes keresztmetszetű rúd keresztmetszetének teljes *A* felületét!
c.) Számítsa ki, hogy az I-acél Θ_I keresztmetszeti tényezője hány százaléka a négyzetes rúd $\Theta_{négyzet}$ értékének!
d.) Adja meg, az I-acél keresztmetszetének felülete hány százaléka a négyzet felületének!

Láthatjuk, hogy a feladatban szereplő I profillal majdnem ugyanakkora keresztmetszeti tényezőt nyertünk mint tömör négyzettel, úgy, hogy közben a szükséges acéltömeg majd' felét megspóroltuk

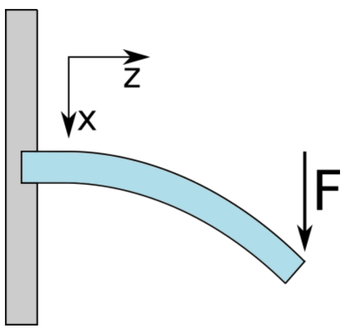
Gy5/2

Egy *A* keresztmetsztű *L* (nyújtatlan) hosszúságú ρ (nem elhanyagolható) sűrűségű homogén hasábot lágyan a plafonhoz ragasztottunk. A hasáb a saját súlya miatt megnyúlik, a feladat első részében ezt a megnyúlást kell vizsgálnia. A hasáb anyagának Lamé-állandói μ és λ.
Legyen az origó a plafonon, a *z* tengely mutasson lefelé, a hasáb hosszirányába!

a.) Írja fel a hasábban ébredő σ_{zz} feszültséget a z függvényében! (A feszültségtenzor többi eleme zérus)
b.) Hooke törvény segítségével fejezze ki a deformációtenzor ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz} elemeit a *z* függvényében!
c.) ε_{zz} ismeretében határozza meg a hasáb egyes pontjainak s_z elmozdulását!
d.) Mekkora a rúd ΔL megnyúlása?

A rúd végét ezután *F* erővel húzni kezdjük lefelé. Ismételje meg az előző részfeladatokat erre az esetre, azaz

e.) Írja fel a hasábban ébredő σ_{zz} feszültséget a *z* függvényében!
f.) Hooke törvény segítségével fejezze ki a deformációtenzor ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz} elemeit a *z* függvényében!
g.) ε_{zz} ismeretében határozza meg a hasáb egyes pontjainak s_z elmozdulását!
h.) Mekkora a rúd ΔL megnyúlása?



Gy5/3

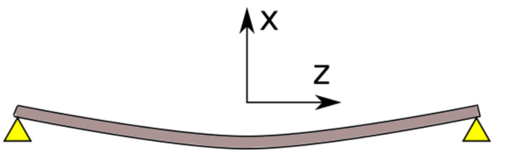
Egy keskeny, könnyű, *L* hosszúságú rudat az egyik végén vízszintesen befalaztunk, a másik végét függőlegesen *F* erővel nyomjuk lefelé. Legyen a rúd (terheletlen) tengelye a z tengely, az *F* erő iránya az *x* tengely. A rúd Young-modulusa *E*, keresztmetszeti tényezője Θ.

d.) Adjuk meg a rúdban ébredő hajlító nyomatékot z függvényében!

e.) Írjuk fel a rúd alakját meghatározó differenciálegyenletet!

f.) Adjuk meg a rúd alakját! Mennyivel hajlik le a rúd terhelt vége?

Gy5/4



Egy rugalmas pallót két ékre helyeztünk, ahogy az ábra is mutatja. A palló végpontjai a $z = \pm L/2$ helyeken találhatók. A palló anyagának Young-modulusa E, a keresztmetszeti tényező Θ. A palló össztömege $m_ö$.

a.) Adja meg a két éknél fellépő tartóerőket!
b.) Adja meg a pallóban ébredő hajlítónyomatékot a z függvényében!
c.) Adja meg a palló alakját meghatározó differenciálegyenletet!
d.) Oldja meg a differenciálegyenletet, adja meg a megoldást annak ismeretében, hogy a két éknél a palló elmozdulása zérus.
e.) Mekkora a palló középpontjának a süllyedése?
