MECHANICS 2 (2017/18 spring)	HW 12

Small test problems

HW12/1

A charged particle can move in the x-y plane, while a magnetic field that points in direction z is also present. A possible choice for the Hamiltonian of the system is

$$H(x,y,p_x,p_y)=\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2m}(p_y-eBx)^2.$$

a.) Write down the full Hamilton-Jacobi equation for the system.

b.) Following the usual separation $S(x,y,t)=S_0(x,y,E)-Et$, write down the shortened Hamilton-Jacobi equation for the S_0 function.

c.) Separate the equation further. Search it in the form $S_0(x,y,E)=S_x(x,E,\alpha)+S_y(y,E,\alpha)$. Substitute this form into the shortened Hamilton-Jacobi equation.

d.) You can see, that the dependence on y appears only through the term $\frac{\partial S_y}{\partial y}$, the other terms are independent of y. Therefore we can choose $\frac{\partial S_y}{\partial y}=\alpha$ to be a constant. Use this choice. What equation you get for S_x?

e.) Solve the equations, and express the functions $S_x(x,E,\alpha)$ and $S_y(y,E,\alpha)$. Write down the full solution $S(x,y,E,\alpha,t)$.

HW12/2

A rubber ball of mass m can move along the axis x in a box of length L. At the endpoints of the box the ball bounces back elastically and immediately. Between the two walls the motion of the ball is described by the Hamiltonian

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}.$$

a.) Draw the trajectory of the ball in the phase-plane if the ball has energy E.

b.) Determine the phase-surface bounded by the trajectory. Denote it by 2π I(E)-lel!

c.) Using the dependence of I(E) on E determine the period of the motion.

Problems for practice

Pr12/1

A particle can move along the x axis, and its Hamiltonian is

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}-\frac{\alpha}{|x|}.$$

(Remark: This is the special case of the Kepler problem, when the angular momentum of the particle is zero.)

a.) Draw on the phase-plane p-x the bounded trajectories that correspond to negative energies, E<0.

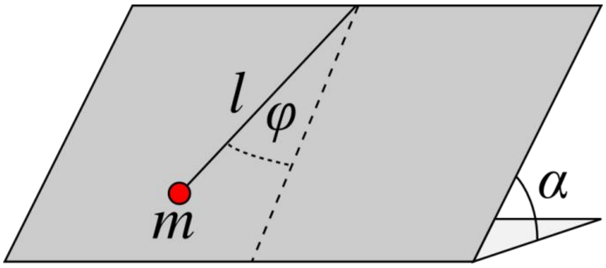
b.) Determine the maximal distance x_{max} as a function of E.

c.) Write down the integral that determine the action variable I.

d.) We know, that $\xi=\int_0^1 du\sqrt{1+\frac{1}{u}}$ =2.296... . Using this, determine the function I(E).

e.) Determine the period of the motion as a function of E.

Pr12/2



A pendulum is put on a ramp whose slope α can be modified. The length of the pendulum is l, the mass of the body is m. We describe the position of the pendulum by the angle φ. The friction between the body and the ramp is negligible.

a.) Construct the Hamiltonian of the system.

b.) For a given value of α determine the action variable $I(E,\alpha)$ as a function of energy.

c.) The angle-amplitude of the motion was initially $A_{\varphi,0}$, when the slope of the ramp was α_0. Then the slope of the ramp was changed slowly to α_1. Using the theorem of adiabatic invariance (problem 5. of class) determine the final angle-amplitude $A_{\varphi,1}$ of the system.

Pr12/3

Consider the problem of central motion. The Hamiltonian of the system in polar coordinates is

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi)=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}+V(r).$$

a.) Write down the full Hamilton-Jacobi equation of the system.

b.) Separate the time using the form $S(r,\varphi,t)=S_0(r,\varphi,E)-Et$. Write down the shortened Hamilton-Jacobi equation for S_0.

c.) Separate the angle, i.e. search the solution in the form $S_0(r,\varphi,E)=S_r(r,L,E)+L\varphi$, where L is a constant. Write down the (so called) radial Hamilton-Jacobi equation for S_r.

d.) Determine the integral that expresses S_r. ($S_r=\int dr...$)

The integral cannot be evaluated in general. However, many questions can be answered without evaluating it.

e.) At the moment $t = 0$ the particle's distance from the origin is $r = R$ and is at the angle $\varphi=0$, while it has momenta $p_r = 0$ and $p_\varphi = L_0$. Using these initial conditions determine the constants L and E.

f.) The canonical coordinates corresponding to E and L are denoted by β_E and β_L. We have not evaluated the function S in a closed fotm, but these constants can be determined in a form, where only an integral over r remains:

$$\beta_E=\frac{\partial S}{\partial E}=-t+\int dr...$$

$$\beta_L=\frac{\partial S}{\partial L}=\varphi+\int dr...$$

Determine the two „ ...”-s!

g.) EXTRA! Let $V(r)=-\frac{k}{r}$. Then the integral for β_L can be evaluated. What do you get?

KisZH feladatok

HF12/1

Egy töltött részecske az x-y síkban mozoghat, rá z irányú mágneses térerősség hat. A rendszer (egy lehetséges) Hamilton-függvénye:

$$H(x,y,p_x,p_y)=\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2m}(p_y-eBx)^2$$

a.) Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) A szokásos $S(x,y,t)=S_0(x,y,E)-Et$ szeparálást alkalmazva írja fel az S_0-ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!

c.) Szeparálja tovább a hatásfüggvényt, keresse $S_0(x,y,E)=S_x(x,E,\alpha)+S_y(y,E,\alpha)$ alakban! Helyettesítse ezt az alakot a b.)-ben kapott rövidített Hamilton-Jacobi egyenletbe!

d.) Láthatja, hogy y-tól való függés csak a $\frac{\partial S_y}{\partial y}$ tagon keresztül történik, az egyenlet többi tagja független y-tól. Ezért $\frac{\partial S_y}{\partial y}=\alpha$ konstansnak választható. Használja ezt a választást! Milyen egyenletet kap S_x-re?

e.) Oldja meg az egyenleteket, adja meg az $S_x(x,E,\alpha)$ és $S_y(y,E,\alpha)$ függvényeket, majd ezekből a teljes $S(x,y,E,\alpha,t)$ hatásfüggvényt!

HF12/2

Egy m tömegű gumilabda az x tengely mentén mozoghat egy dobozban, aminek hosszúsága L. A labda mozgását a két fal között az alábbi Hamilton-függvény írja le:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}$$

a.) Rajzolja fel az E energiájú periodikus mozgásnak megfelelő fázistér-beli trajektóriát!

b.) Határozza meg a trajektória által körbezárt fázis-területet, ezt jelölje 2π I(E)-lel!

c.) Az I(E) függvényből kiindulva határozza meg a mozgás periódusidejét.

Gyakorlófeladatok

Gy12/1

Egy tömegpont az x tengely mentén mozoghat, Hamilton függvénye:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}-\frac{\alpha}{|x|}.$$

(Megj: ez lényegében a Kepler problémának az a határesete, amikor a keringő bolygó perdülete zérus.)

a.) Rajzolja fel a p-x fázissíkra az E<0 negatív energiákhoz tartozó periodikus mozgásoknak megfelelő szintvonalakat.

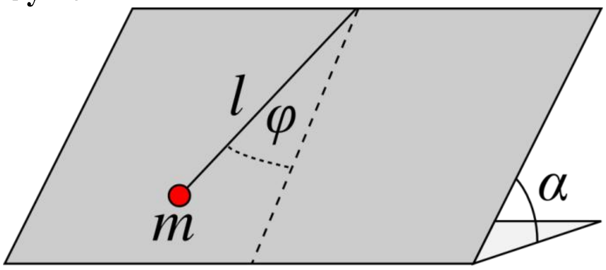
b.) Adja meg E függvényében az x_{max} maximális kitérést!

c.) Írja fel az I hatásváltozót kifejező integrált!

d.) Ismeretes, hogy $\xi=\int_0^1 du\sqrt{1+\frac{1}{u}}=2.296\ldots$. Ennek segítségével fejezze ki az I(E) függvényt!

e.) Adja meg a mozgás periódusidejét az energia függvényében!

Gy12/2



Egy állítható α hajlásszögű lejtőre egy m tömegű l hosszúságú matematikai ingát fektettünk. Az inga kitérését a φ szöggel mérjük. Az ingatest súrlódás nélkül mozoghat a lejtőn.

a.) Konstruálja meg a rendszer Hamilton-függvényét!

b.) Adott α esetén határozza meg az $I(E,\alpha)$ hatásváltozót az energia függvényében!

c.) Az inga eredetileg $A_{\varphi,0}$ szögamplitúdójú rezgést végzett, a lejtő hajlásszöge ekkor α_0 volt. Ezután a lejtő hajlásszögét lassan, nem rángatva egy másik α_1 szögre változtattuk. Az adiabatikus invariancia tételét felhasználva adja meg a végállapotban az inga $A_{\varphi,1}$ szögamplitudóját!

Gy12/3

Tekintse a centrális erőtérben mozgó részecske problémáját. A rendszer Hamilton-függvénye polár koordinátákban:

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi)=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}+V(r)$$

a.) Írja fel a rendszer teljes Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Szeparálja az időt, azaz keresse a megoldást $S(r,\varphi,t)=S_0(r,\varphi,E)-Et$ alakban!
Írja fel az S_0-ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!

c.) Szeparálja a szöget, azaz keresse az S_0 függvényt $S_0(r,\varphi,E)=S_r(r,L,E)+L\varphi$ alakban, ahol L egy újabb konstans. Írja fel az S_r-re vonatkozó ún. radiális Hamilton-Jacobi egyenletet!

d.) Adja meg az S_r-t kifejező integrált! ($S_r=\int dr...$)

A megjelenő integrált általános esetben nem tudjuk zárt alakban kifejezni. Sok kérdésre azonban úgy is válaszolhatunk, hogy nem végezzük el az integrált.

e.) A $t = 0$ időpontban a részecske az origótól $r = R$ távolságra volt a $\varphi=0$ helyen, és épp a sugárra merőlegesen haladt, azaz $p_r = 0$ és $p_\varphi = L_0$ voltak a kezdeti impulzusok. Ezen kezdeti feltételek ismeretében fixáljuk az L és E konstansokat!

f.) Az E-hez és L-hez kanonikusan konjugált koordináták legyenek β_E és β_L. Bár az S hatásfüggvényt nem fejezte ki zárt alakban, de a két β konstanst fel tudja írni úgy, hogy bennük legfeljebb egy r szerinti integrál van:

$$\beta_E=\frac{\partial S}{\partial E}=-t+\int dr...$$

$$\beta_L=\frac{\partial S}{\partial L}=\varphi+\int dr...$$

Fejezze ki a két „ ...”-ot!

g.) EXTRA! Legyen $V(r)=-\frac{k}{r}$! Ekkor a β_L-t meghatározó integrált mégis el tudja végezni. Végezze el! Mit kapott?