| MECHANICS 2 (2017/18 tavasz) | HW 11 |
| --- | --- |

# Small-test problems

**HW11/1**

A cilinder having moment of inertia $\Theta$ can easily rotate around a fixed axis. The Hamiltonian of the system is

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^{\ 2}}{2\Theta}$$

a.) Write down the Hamilton-Jacobi equation for the system.

b.) Following the usual separation $S(\varphi,t) = S_0(\varphi, E) - Et$ write down the shortened Hamilton Jacobi equation for $S_0$.

c.) Solve the shortened equation, i.e. express the solution $S_0(\varphi, E)$.

d.) At the t=0 moment the cilinder is in the position $\varphi = 0$, and has angular momentum $p_\varphi = L$. Using this information determine the values of the constants of motion $E$ and $\frac{\partial S}{\partial E} = \beta$ .

e.) From the results of d.) determine the $\varphi(t)$ solution of the equations of motion.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**HW11/2**

The Hamiltonian of a free relativisticly fast particle is

$H(x, p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$.

a.) Write down the Hamilton-Jacobi equation for the system.

b.) Following the usual separation of time, by introducing the constant E, write down the shortened Hamilton-Jacobi equation.

c.) Solve the shortened equation. Determine also the solution of the full Hamilton-Jacobi equation.

d.) Determine $\beta_E$ , the canonical pair of $E$.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

# Problems for practice

**Pr11/1**

A particle can move along the x axis. An external force that increases linearry in time acts on the particle, therefore the Hamiltonian of the system is

$$H(x,p,t)=\frac{p^2}{2m}-Axt.$$

a.) Write down the Hamilton-Jacobi equation for the system.
b.) The Hamilton function depends explicitly on time, therefore we cannot follow the usual separation technique. Try the following form instead,
$S(x,t)=F(t)x+G(t)$.
Substitute this in the Hamilton-Jacobi equation.
c.) Collect the terms of the equation in the form $x\,(\text{something}_1)+\text{something}_2=0$, where the two „somethings" do not depend on *x*.
d.) In order to find the solution of the equation, both the two „somethings" must equal zero (why?). Using this, determine the functions *F(t)* and *G(t)*. If your calculation is correct, an integration constant appears. Denote it by $\alpha$.
e.) Write down the solution $S(x,\alpha,t)$. In the moment $t=0$ the particle is in $x_0=0$ and has momentum $p_0=0$. Using this information determine the value of $\alpha$.
f.) According to the Hamilton-Jacobi theory, $\beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ is also a constant of motion. Express its value using the initial conditions.
g.) From the $\beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ equation determine the *x(t)* solution of the equation of motion.

---

**Pr11/2**

In the class we have considered the particle in gravitational field. The Hamiltonian is

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}+mgx$$

In the usual Hamilton-Jacobi approach we search a 2nd type generator function $S(x,\alpha,t)$ that makes the new Hamiltonian zero. Then we exploit the fact that the new momentum α is a constant of motion. However, this is not the only possible choice.

In this problem we consider a 3rd type generator function $S(p,\alpha)$. In this case $x=-\frac{\partial S}{\partial p}$.

a.) Write down the Hamilton-Jacobi equation: $H(p,-\frac{\partial S}{\partial p})+\frac{\partial S}{\partial t}=0$
b.) Separate the time, using $S(p,t)=S_0(p,E)-Et$. Write down the shortened Hamilton-Jacobi equation for $S_0$.
c.) Solve the equation, and express the function $S_0(p,E)$.
d.) At the moment $t=0$ the particle starts from the position $x=0$ having momentum $p_0$. Express the value of the constant *E*.
e.) The quantity $\beta=\frac{\partial S}{\partial E}$ is also a constant of motion. Express its value using the initial conditions.
f.) Determine the *x(t)* function.

# KisZh-án szerepelhető feladatok

**HF11/1**

Egy $\Theta$ tehetetlenségi nyomatékú tárcsa egy tengelyhez van rögzítve, ami körül könnyen elfordulhat. A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{{p_\varphi}^2}{2\Theta}$$

a.) Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) A szoksásos $S(\varphi,t) = S_0(\varphi,E) - Et$ szeparálást alkalmazva írja fel az $S_0$-ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!

c.) Oldja meg az egyenletet, adja meg az $S_0(\varphi,E)$ függvényt!

d.) A $t = 0$ időpontban a tárcsa a $\varphi = 0$, $p_\varphi = L$ kezdeti feltételekkel indult. Ez alapján adja meg az $E$ és a $\frac{\partial S}{\partial E} = \beta$ mozgásállandók értékét!

e.) A d.)-ben kapott egyenletekből fejezze ki a tárcsa mozgását leíró $\varphi(t)$ függvényt!

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**HF11/2**

Egy relativisztikusan gyors, szabad részecske Hamilton függvénye az alábbi alakú,

$$H(x,p) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

a.) Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Az időfüggés szokásos szeparálásával, az $E$ konstans bevezetésével írja fel a rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet.

c.) Adja meg a rövidített és a teljes Hamilton-Jacobi egyenlet megoldását.

d.) Határozza meg az $E$-hez tartozó kanonikusan konjugált $\beta_E$ impulzust

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------

# Gyakorlófeladatok

**Gy11/1**

Egy tömegpont az $x$ tengely mentén mozoghat, rá időben lineárisan növekvő külső erő hat. A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(x,p,t)=\frac{p^2}{2m}-Axt$$

a.) Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Mivel a Hamilton-függvény explicit módon függ az időtől, a szokásos szeparálást közvetlenül nem tehetjük meg. Próbálkozzon az alábbi alakkal: $S(x,t)=F(t)x+G(t)$!
Írja fel a Hamilton-Jacobi egyenletet ezt az alakot feltételezve!

c.) Gyűjtse össze a tagokat úgy, hogy az egyenlet az $x(\text{valami}_1)+\text{valami}_2=0$ alakban álljon előttünk, ahol a két „valami" már nem függ az $x$-től.

d.) Ahhoz, hogy az egyenletet megoldjuk, a két „valami"-nek külön-külön zérusnak kell lennie. (Miért is?) Ebből a két feltételből adja meg az $F(t)$ és $G(t)$ függvényeket! Ha jól számolt, megjelenik egy szabad integrálási konstans, ezt jelölje $\alpha$!

e.) Írja fel az $S(x,\alpha,t)$ függvényt! A $t=0$ időpontban a tömegpont az $x_0=0$ és $p_0=0$ helyzetből indult. Ennek segítségével rögzítse az $\alpha$ konstans értékét!

f.) A Hamilton-Jacobi egyenlet szerint a $\beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ mozgásállandó. Fejezze ki ennek értékét a kezdeti feltételek segítségével!

g.) A $\beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ összefüggésből fejezze ki a mozgásegyenlet $x(t)$ megoldását!

---

**Gy11/2**

Gyakorlaton szerepelt a függőleges hajítás problémája, aminek Hamilton-függvénye:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}+mgx$$

A szokásos Hamilton-Jacobi egyenletben „2"-es típusú $S(x,\alpha,\tau)$ alkotófüggvényt keresünk, ami zérussá teszi a Hamilton-függvényt, majd kihasználjuk, hogy az $\alpha$ új impulzus mozgásállandó. Ez azonban nem az egyetlen lehetséges választás.

Keressünk most „3"-as típusú $S(p,\alpha)$ alkotófüggvényt! Ekkor $x=-\frac{\partial S}{\partial p}$.

a.) Írja fel a Hamilton-Jacobi egyenletet: $H(p,-\frac{\partial S}{\partial p})+\frac{\partial S}{\partial t}=0$

b.) Szeparálja az időt az $S(p,t)=S_0(p,E)-Et$ alakban! Írja fel az $S_0$-ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!

c.) Oldja meg az egyenletet, adja meg $S_0(p,E)$ függvényt!

d.) A $t=0$ időpontban a test az $x=0$ pontból indult $p_0$ impulzussal. Fejezze ki ennek segítségével az $E$ konstans értékét!

e.) A $\beta=\frac{\partial S}{\partial E}$ mennyiség a Hamilton-Jacobi egyenlet értelmében időállandó. Fejezze ki ennek értékét a kezdeti feltételek segítségével!

f.) Adja meg a mozgásegyenlet $x(t)$ megoldását!