Small test problems

HW10/1

The Hamiltonian of a system with one degree of freedom reads as

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right).$$

Consider a canoncial transformation that is generated by a 2nd type generator function

$$W_2(q,P) = \frac{P}{q}.$$

a.) Using the derivatives of the generator function determine the p(q,P) and Q(q,P) relations.
b.) Using the results of a.) express the „old" variables in terms of the „new" ones, i.e. express the q(Q,P) and p(Q,P) relations.
c.) Determine the new form (K(Q,P)) of the Hamiltonian.
d.) Starting from the K(Q,P) Hamiltonian determine the canonical equations for the new coordinate and momentum.
e.) Determine the solutions Q(t) and P(t).

HW10/2

Consider the following transformation that rotates the coordinate axes of the phase-space. (α is a real parameter)

$$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$$

$$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$$

a.) By calculating the Poisson bracket [Q,P] show that the transformation is canonical.

We would like to find a W_2(q,P) that generates the trasformation defined above. Therefore:

b.) Transform the relations, and express the p(q,P) and Q(q,P) functions.
c.) Using the results of b.) determine the derivatives $\frac{\partial W_2(q,P)}{\partial q}$ and $\frac{\partial W_2(q,P)}{\partial P}$.
d.) Solve the differential equations of c.), i.e. give an appropriate function $W_2(q,P)$.

Problems for practice

Pr10/1

The Hamiltonian of a one-dimensional Harmonic oscillator reads as

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2}+\frac{x^2}{2}.$$

(We arrived to this special form (m=1, ω=1) by rescaling time and energy units.)

a.) Consider the transformation

$$Q=\frac{x+ip}{\sqrt{2}}$$

$$P=\frac{ix+p}{\sqrt{2}}$$

Using Poisson brackets show, that the transformation is canonical.

b.) Construct a 2nd type generator function that generates the above defined transformation.

c.) Determine the new form (K(Q,P)) of the Hamiltonian. Write down and solve the canonical equations of motion.

d.) You can see, that the new Hamiltonian is complex valued, and the solutions of the canonical equations are also complex functions. However, the original p and x variables are real. Show that for real x and p the relation P = iQ* holds. Show that during the time evolution of Q and P this condition is conserved. (i.e. show that $\frac{d}{dt}P=i\frac{d}{dt}Q^*$)

Pr10/2

Consider the following transformation,

$Q=q^\alpha\cos\beta p,\quad P=q^\alpha\sin\beta p,$

where α and β are real parameters.

a.) Calculate the Poisson bracket [Q,P].

b.) What should be the relation between α and β if the transformation is canonical?

c.) Divide the two equations with each other, and determine the Q(p,P) relation.

d.) Search for an appropriate 4th type $W_4(p,P)$ generator function. Use the result of c.).

Pr10/3

The canoncial coordinate and momentum of a system with one degree of freedom is q and p. We would like to transform to

$$Q=\alpha\frac{p}{q},\quad P=\beta q^2,$$

where α and β are first unknown..

a.) Determine the corresponding Jacobi matrix M_{ij},

$$M_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p}\\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p}\end{pmatrix}.$$

b.) Express the matrix $M_{ik}J_{kl}M_{jl}$.

c.) What relation must hold between α and β, if the transformation is canonical?

Pr10/4

Two coupled oscillators are described by the Hamiltonian

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2)=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_1p_2)+\frac{1}{2}m\Omega^2(q_1^2+q_2^2-q_1q_2)$$

We would like to find a canonical transformation that transforms into the normal coordinates of the system.

a.) Search the new canonical momenta in the form

$$P_1 = a(p_1 - p_2)$$

$$P_2 = b(p_1 + p_2)$$

Determine the values of the parameters a and b in such a way that the kinetic energy part reads as,

$$\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2)$$

b.) Search the canonical coordinates in a form

$$Q_1 = c(q_1 - q_2)$$

$$Q_2 = d(q_1 + q_2)$$

Determine the parameters c and d to make the transformation canonical.

c.) Express the new form of the Hamiltonian using the new variables $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$. If you calculated correctly, then the final Hamiltonian is separated by normal coordinates (i.e. there is no Q_1Q_2 term.) What are the oscillation frequencies?

d.) Show that the following quantity is a constant of motion,

$$D = Q_1P_2 - Q_2P_1 .$$

KisZh-án szerepelhető feladatok

HF10/1

Egy egy szabadsági fokú mechanikai rendszer Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$$

Szeretnénk egy kanonikus transzformációt végrehajtani, aminek alkotófüggvénye „2"-es típusú:

$$W_2(q,P) = \frac{P}{q}$$

a.) Az alkotófüggvény megfelelő deriváltjai segítségével adja meg a p(q,P) és Q(q,P) összefüggéseket!
b.) Az a.) feladatban kapott összefüggések segítségével adja meg a „régi" kanonikus koordinátákat az „újak" függvényében, azaz adja meg a q(Q,P) és p(Q,P) összefüggéseket!
c.) Adja meg az új K(Q,P) Hamilton függvényt!
d.) Írja fel a K(Q,P) Hamilton-függvény segítségével a kanonikus mozgásegyenleteket az új változókra!
e.) Adja meg a mozgásegyenletek Q(t) és P(t) megoldását!

HF10/2

Adott az alábbi transzformáció, ami a q-p fázissík koordinátatengelyeit forgatja el:

$$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$$

$$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$$

a.) A [Q,P] Poisson zárójel kiszámításával mutassa meg, hogy a transzformáció kanonikus!

Szeretnénk egy W_2(q,P) alkotófüggvényt találni, ami a fenti transzformációt generálja. Ehhez a következőket kell tennie:

b.) Alakítsa át a fenti egyenleteket és fejezze ki a p(q,P) és Q(q,P) függvényeket!
c.) A b.) feladat eredményeiből olvassa le a $\frac{\partial W_2(q,P)}{\partial q}$ és $\frac{\partial W_2(q,P)}{\partial P}$ deriváltakat!
d.) Oldja meg a differenciálegyenletet, azaz adjon meg egy megfelelő $W_2(q,P)$ függvényt!

Gyakorlófeladatok

Gy10/1

Egy egydimenziós harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye megfelelő időegységet választva az alábbi alakba írható:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2}+\frac{x^2}{2}$$

a.) Tekintse az alábbi transzformációt:

$$Q=\frac{x+ip}{\sqrt{2}}$$

$$P=\frac{ix+p}{\sqrt{2}}$$

Poisson-zárójelek segítségével mutassa meg, hogy a transzformáció kanonikus!

b.) Konstruáljon egy „2"-es típusú alkotófüggvényt, ami az a.) feladatban szereplő kanonikus transzformációt generálja.

c.) Adja meg az új K(Q,P) Hamilton függvényt! Írja fel és oldja meg a kanonikus egyenleteket!

d.) Láthatja, hogy az új Hamilton-függvény komplex, és a kanonikus egyenletek megoldásai is komplex értékű függvények. Az eredeti p,x változók viszont valósak, ez alapján mutassa meg, hogy P = iQ*, és azt, hogy a K(Q,P)-ből számolt mozgásegyenletek nem „rontják el" ezt az összefüggést (azaz $\frac{d}{dt}P=i\frac{d}{dt}Q^*$)

e.) Legendre-transzformáció segítségével készítsen „1"-es típusú $W_1(x,Q)$ alkotófüggvényt a b.)-ben kapott $W_2(x,P)$-ből. Mutassa meg, hogy ez is ugyanazt a transzformációt generálja!

Gy10/2

Tekintse az alábbi transzformációt:

$$Q=q^\alpha\cos\beta p,\quad P=q^\alpha\sin\beta p$$

a.) Számítsa ki a [Q,P] Poisson-zárójelet!

b.) Mekkorának válasszuk α-t és β-t ha azt szeretnénk, hogy a transzformáció kanonikus legyen?

c.) Vegye a két egyenlet hányadosát, és ezzel fejezze ki a Q(p,P) összefüggést!

d.) „4"-es típusú $W_4(p,P)$ alkotófüggvényt keresünk a transzformációnak. A c.)-ben kapott kifejezés (megfelelő előjellel vett) integráljából fejezze ki W_4-et!

Gy10/3

Egy egy szabadsági fokú mechanikai rendszer kanonikus koordinátája és impulzusa q és p. Szeretnénk végrehajtani egy kanonikus transzformációt, amit az alábbi alakban keresünk:

$$Q=\alpha\frac{p}{q},\quad P=\beta q^2,$$

ahol α és β egyenlőre ismeretlen valós konstansok.

a.) Adja meg a transzformációt jellemző M_{ij} Jacobi mátrixot:

$$M_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p}\\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p}\end{pmatrix}$$

b.) Számítsa ki az $M_{ik}J_{kl}M_{jl}$ mátrixot!

c.) Mit követeljünk meg az α és β konstansoktól, ha azt szeretnénk, hogy a transzformáció kanonikus legyen?

Gy10/4

Egy csatolt oszcillátor-pár Hamilton-függvénye az alábbi alakban van megadva:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) + \frac{1}{2} m\Omega^2 (q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2)$$

Szeretnénk olyan kanonikus transzformációt végrehajtani, ami áttranszformál a rendszer normálkoordinátáiba.

a.) Keresse az „új” kanonikus impulzusokat az alábbi alakban:

$$P_1 = a(p_1 - p_2)$$

$$P_2 = b(p_1 + p_2)$$

Adja meg az *a* és *b* paraméterek értékét úgy, hogy a Hamilton függvény kinetikus energiát leíró tagja az alábbi alakú legyen:

$$\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2)$$

b.) Keresse az „új” kanonikus koordinátákat az alábbi alakban:

$$Q_1 = c(q_1 - q_2)$$

$$Q_2 = d(q_1 + q_2)$$

Adja meg a *c* és *d* paraméterek értékét úgy, hogy a transzformáció kanonikus legyen!

c.) Adja meg a Hamilton-függvényt az új $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ változók függvényében! Ha jól számolt ez (az eredeti Hamilton-függvény szerencsés alakja miatt) máris normálmódusok szerint szeparált alakban van, azaz nincs Q_1Q_2 szorzat tag a Hamilton függvényben. Mekkorák az egyes módusok rezgési frekvenciái?

d.) Mutassa meg, hogy az alábbi mennyiség időállandó!

$$D = Q_1 P_2 - Q_2 P_1$$