KisZh-án szerepelhető feladatok

HF5/1

Tanulmányai során már nagyon korán találkozott Pascal törvényével, ami kimondja: egy nyugvó folyadékban a nyomás izotrop, azaz a folyadékba helyezett „mérőfelületre” ható nyomóerő független a felület irányától.

Ezt a feszültségtenzor bevezetésével másként is megfogalmazhatjuk. Tudjuk, hogy egy nyugvó folyadékban nyírófeszültségek nem ébrednek, azok ugyanis a sebességmező deriváltjaival arányosak, nyugvó folyadékban pedig minden sebesség zérus.

Pascal törvénye tehát erre az esetre átfogalmazva: Amennyiben egy közegben minden nyírófeszültség eltűnik, úgy a feszültségtenzor arányos az egységmátrixszal. (~ a nyomás izotrop.)

Ebben a feladatban ezt a tételt kell belátnia indirekt bizonyítással.

Tegye fel, hogy a feszültségtenzor diagonális, de a diagonális elemei nem egyenlőek:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

azaz pl. $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$.

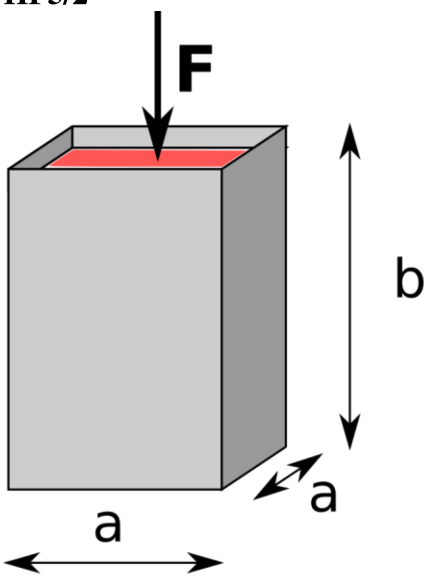
a.) Írja fel azon mátrixot, ami elforgatja a koordinátarendszerünket a z tengely körül valamely α szöggel!

b.) Határozza meg a feszültségtenzor elemeit ebben az α szöggel elforgatott koordinátarendszerben!

c.) Adja meg az új koordinátarendszerben a σ'_{xy} nyírófeszültséget $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$ esetén!

d.) Mutassa meg, hogy tetszőleges α szögű forgatás esetén csak akkor tűnik el a σ'_{xy} nyírófeszültség, ha $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$!

HF5/2



Egy merev dobozba könnyű, rugalmas anyagot töltöttünk. A doboz alapja egy *a* oldalú négyzet, magassága *b*. Az anyag nem tapad a doboz falaihoz, csak zselészerűen kitölti a dobozt a felszínéig. A közeg Lamé-állandói μ és λ.

Felülről egyelőre ismeretlen *F* erővel nyomni kezdjük az anyag felszínét, aminek hatására az Δb magasságnyit benyomódott.

a.) Adja meg a közeg deformációtenzorát!

b.) Írja fel a Hooke-törvényt a közegre!

c.) Fejezze ki a feszültségtenzor zérustól különböző elemeit! (σ_{xx}, σ_{yy} és σ_{zz}.)

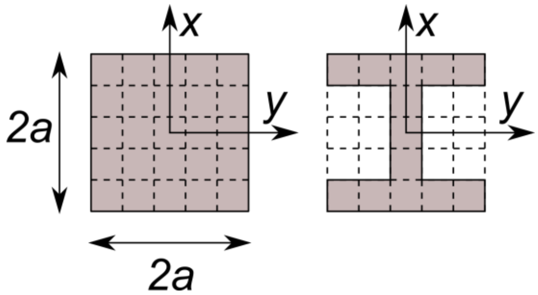
d.) Adja meg az ismeretlen F nyomóerőt!

HF5/3

Gyakorlaton láthattuk, hogy rugalmas rudak hajlításánál megjelenik a keresztmetszeti tényező, amit az alábbi integrál definiál:

$$\Theta = \int x^2 dA,$$

ahol az integrálás a rúd keresztmetszetére történik, x a keresztmetszet pontjainak a neutrális felülettől mért távolsága. (A neutrális felület szimmetrikus kereszmetszetű rudak esetén éppen „középen” van.)



Két rudat hoztunk létre acélból. Az egyik tömör négyzetes keresztmetszetű, a másik pedig „I”-alakú, ahogy az ábra is mutatja. Az I szára és két fedlapja is $2a/5$ vastagságú.

a.) Számítsa ki a négyzetes keresztmetszetű rúd $\Theta_{négyzet}$ keresztmetszeti tényezőjét!

b.) Adja meg a négyzetes keresztmetszetű rúd keresztmetszetének teljes A felületét!

c.) Számítsa ki, hogy az I-acél Θ_I keresztmetszeti tényezője hány százaléka a négyzetes rúd $\Theta_{négyzet}$ értékének!

d.) Adja meg, az I-acél keresztmetszetének felülete hány százaléka a négyzet felületének!

Láthatjuk, hogy a feladatban szereplő I profillal majdnem ugyanakkora keresztmetszeti tényezőt nyertünk mint tömör négyzettel, úgy, hogy közben a szükséges acéltömeg majd’ felét megspóroltuk.

Gyakorlófeladatok

Gy5/1

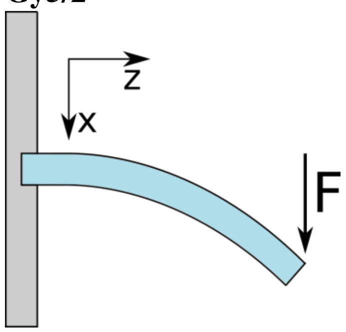
Egy A keresztmetsztű L (nyújtatlan) hosszúságú ρ (nem elhanyagolható) sűrűségű homogén hasábot lágyan a plafonhoz ragasztottunk. A hasáb a saját súlya miatt megnyúlik, a feladat első részében ezt a megnyúlást kell vizsgálnia. A hasáb anyagának Lamé-állandói μ és λ.
Legyen az origó a plafonon, a z tengely mutasson lefelé, a hasáb hosszirányába!

a.) Írja fel a hasábban ébredő σ_{zz} feszültséget a z függvényében! (A feszültségtenzor többi eleme zérus)
b.) Hooke törvény segítségével fejezze ki a deformációtenzor ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz} elemeit a z függvényében!
c.) ε_{zz} ismeretében határozza meg a hasáb egyes pontjainak s_z elmozdulását!
d.) Mekkora a rúd ΔL megnyúlása?

A rúd végét ezután F erővel húzni kezdjük lefelé. Ismételje meg az előző részfeladatokat erre az esetre, azaz

e.) Írja fel a hasábban ébredő σ_{zz} feszültséget a z függvényében!
f.) Hooke törvény segítségével fejezze ki a deformációtenzor ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz} elemeit a z függvényében!
g.) ε_{zz} ismeretében határozza meg a hasáb egyes pontjainak s_z elmozdulását!
h.) Mekkora a rúd ΔL megnyúlása?

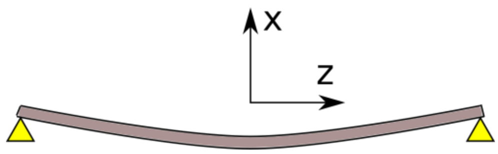
Gy5/2



Egy keskeny, könnyű, L hosszúságú rudat az egyik végén vízszintesen befalaztunk, a másik végét függőlegesen F erővel nyomjuk lefelé. Legyen a rúd (terheletlen) tengelye a z tengely, az F erő iránya az x tengely. A rúd Young-modulusa E, keresztmetszeti tényezője Θ.

a.) Adjuk meg a rúdban ébredő hajlító nyomatékot z függvényében!
b.) Írjuk fel a rúd alakját meghatározó differenciálegyenletet!
c.) Adjuk meg a rúd alakját! Mennyivel hajlik le a rúd terhelt vége?

Gy5/3



Egy rugalmas pallót két ékre helyeztünk, ahogy az ábra is mutatja. A palló végpontjai a $z = \pm L/2$ helyeken találhatók. A palló anyagának Young-modulusa E, a keresztmetszeti tényező Θ. A palló össztömege $m_ö$.

a.) Adja meg a két éknél fellépő tartóerőket!
b.) Adja meg a pallóban ébredő hajlítónyomatékot a z függvényében!
c.) Adja meg a palló alakját meghatározó differenciálegyenletet!
d.) Oldja meg a differenciálegyenletet, adja meg a megoldást annak ismeretében, hogy a két éknél a palló elmozdulása zérus.

e.) Mekkora a palló középpontjának a süllyedése?
