

**kisZH feladatok:****HF2/1**

A Speciális Relativitáselmélet kidolgozásakor rengeteg paradoxon született. Ezek az elmélet (nem létező) belső ellentmondásaira kívántak rámutatni. Némelyikük máig is fennmaradt, mert elemzésük hozzájárul az elmélet jobb megértéséhez. Az egyik ilyen az ún. „ikerparadoxon”, amely mára már beépült az elméletbe.

Egy másik az ún. „**pajta-rúd**” paradoxon. Ennek lényege a következő.

Adott egy pajta, amelynek két ellentétes falán egy-egy ajtó van. Az ajtók távolsága  $L_0$ . Tekintsünk egy ugyancsak  $L_0$  hosszúságú rudat. Fussunk át a rúddal relativisztikus nagyságú  $V$  sebességgel a pajtán! Ekkor hozzánk képest a pajta  $V$  sebességgel mozog. Ezért azt észleljük, hogy a pajta hossza (azaz az ajtók távolsága) kisebb lesz, mint a nyugalmi hosszúság, azaz  $L_p < L_0$ . Mivel  $L_R = L_0$ , ezért  $L_p < L_R$ . Tehát a rúd valamelyik vége mindig kilóg valamelyik ajtón. Azaz a rúd „nem fér be a pajtába”. Tehát, nem tudunk egy olyan pillanatot találni, amikor gyorsan becsukhatnánk mind a két ajtót

A pajtban álló megfigyelő szerint azonban a  $V$  sebességgel mozgó rúd rövidül meg. Azaz  $L_R < L_0$ , Mivel a pajta hossza  $L_p = L_0$ , ezért mindig igaz, hogy  $L_R < L_p$ . Tehát lesz olyan időpillanat amikor a rúd teljes egészében bent van a pajtában. Ekkor mindkét ajtó egy pillanatra becsukható. Mindkét ajtó zárt vagy csukott állapota azonban objektív dolog. Tegyük fel ugyanis, hogy készítünk egy olyan robbantó elektronikát, amelyet a két ajtó sorba kapcsolt zárszerkezete működtet. A bomba tehát akkor robban, amikor mindkét ajtó zárva van. A fenti gondolatmenetekben az ellentmondás nyilvánvaló. A robbanás ténye ugyanis nem lehet relatív. Ezt mindkét megfigyelő egyformá érzékeli. Vagy robban a pajta velü(n)k együtt, vagy nem!

- Mekkora a rúd hossza a pajtához rögzített koordinátarendszerben? Mekkora a pajta hossza a rúddal rögzített koordinátarendszerben? (A további ábrákon legyen a tér-idő-sík origója az a pillanat, amikor a rúd eleje beér a pajtába!)
- Rajzolja fel a pajtához rögzített koordinátarendszerben a rúd elejének és végének világvonalait, valamint a pajta bejáratának és kijáratának világvonalait. Jelölje be azokat az eseményeket amikor a rúd eleje kiér a pajtából, ill. amikor a rúd vége beér a pajtába! Melyik történt korábban?
- A rúddal együttmozgó koordinátarendszer tér és idő koordinátatengelyei az ábrán egyenes vonalak. Rajzolja be ezeket az ábrára!
- A b.) feladatban is jelölt két esemény (rúd eleje kiér a pajtából, rúd vége beér a pajtába) világpontján keresztül húzzon párhuzamost az együttmozgó rendszer idő-tengelyével!
- Ez alapján melyik esemény történt korábban, a rúd vonatkoztatási rendszerében?

A „robbanást” esetleg kiváltó jelenségtől a feladat során tekintsen el. (Ez ugyanis már egy „rafináltabb” történet!)

## HF2/2

Tekintse az alábbi téridő transzformációt!:

$$\Lambda_{\cdot\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Adott egy négyesvektor:  $b^{\mu} = (5,4,0,3)$ . Transzformálja át ezt a fenti transzformációval, azaz adja meg a  $b'^{\mu}$  négyesvektort!
- Adja meg az eredeti  $b^{\mu}$  négyesvektor Minkowski hossz négyzetét!
- Számítsa ki a  $b'^{\mu}$  négyesvektor Minkowski hossz négyzetét, és mutassa meg, hogy ez a c.) feladatban kapottal egyenlő.
- Mutassa meg általánosan, hogy a fenti transzformáció Lorentz-transzformáció! Ehhez mutassa meg, hogy teljesül az alábbi egyenlet:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} g_{\rho\sigma}$$

## Gyakorló feladatok:

### GY2/1

A magas szőke földönkívüliek űrhajója meghibásodott, ezért egyenes vonalú egyenletes mozgást végez az űrben. Ősi ellenségeik, a kis szürkék az űrállomásukon észreveszik a nagy lehetőséget, és célba veszik a szőkék űrhajóját. Az űrállomás megfigyelői úgy látják, hogy az űrhajó  $d$  távolságban fog elhaladni mellettük és  $c/2$  sebességgel halad. Okos fizikusaik kiszámították, mikor és milyen irányban kell kilőniük szintén  $c/2$  sebességű lövedéküket, hogy az űrhajó hozzájuk lehető legközelebb robbanjon fel. Számításaikban a robbanás időpontját jelölik meg  $t=0$ -ként, a robbanás helyét tekintik az origónak.

- Vegyen fel kényelmes koordinátatengelyeket!
- Mikor kellett kilőniük a szürkéknek a lövedéket?
- Adjuk meg a lövedék  $\mathbf{r}(t)$  hely-idő függvényét a választott koordinátarendszerben!

A magas szőkék űrhajóján utazik a híres lakodalmos roksztár és amatőr UFO-kutató, P. Attila, aki kidolgozta a „mindenek relativitásának” elméletét. Bár számításokat nem végez, azzal nyugtatja magát, hogy minden relatív, ezért csak a szürkék vonatkoztatási rendszerében robban fel az űrhajó, az övékben nem.

- Adjuk meg a lövedék  $\mathbf{r}'(t')$  hely-idő függvényét az űrhajóhoz rögzített koordinátarendszerben!
- Adjuk meg az űrhajó rendszerében a lövedék kilövésének pontos helyét és idejét!
- Kell-e aggódnunk a szőkéknek, vagy P. Attila nyugodtan rázendíthet a „gabonakör közepén állók” című méltán híres dalára?

### GY2/2

Legyen  $\Lambda_1$  az a (standard) Lorentz-transzformáció ami átvizs a  $+x$  irányban  $0,6c$ -vel mozgó rendszerbe,  $\Lambda_2$  pedig az a transzformáció ami átvizs a  $+y$  irányban  $0,6c$ -vel mozgó rendszerbe.

- Adjuk meg a  $\Lambda_1$  és  $\Lambda_2$  transzformációk mátrixait!
- Hajtsa végre egymás után a két transzformációt. Adjuk meg a  $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$  és  $\Lambda' = \Lambda_2 \Lambda_1$  transzformációk mátrixát. Mutassa meg, hogy nem ugyanazt kapta.
- Tekintszen egy részecskét, ami áll annak a rendszernek az origójában, ahová a  $\Lambda$  transzformáció hatására jutottunk. Adjuk meg ennek a részecskének a mozgását az eredeti koordinátarendszerben. Mekkora és milyen irányú a részecske sebessége?
- Végezze el a c.) feladat számításait egy olyan részecskére, ami a  $\Lambda'$  rendszer origójában áll. Mekkora és milyen irányú sebességet kap az eredeti („álló”) rendszerben?