

A15.) feladat

Egy egy szabadsági fokú mechanikai rendszer kanonikus koordinátája és impulzusa q és p . Szeretnénk végrehajtani egy kanonikus transzformációt, amit az alábbi alakban keresünk:

$$Q = \alpha \frac{P}{q}, \quad P = \beta q^2,$$

ahol α és β egyenlőre ismeretlen valós konstansok.

- a.) Adja meg a transzformációt jellemző M_{ij} Jacobi mátrixot:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$$

- b.) Számítsa ki az $M_{ik} J_{kl} M_{jl}$ mátrixot!

- c.) Mit követeljünk meg az α és β konstansoktól, ha azt szeretnénk, hogy a transzformáció kanonikus legyen?

A16.) feladat

Egy részecske szabadon mozoghat az x tengely mentén, a Hamilton függvénye triviális módon:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m}.$$

Tekintse az alábbi, explicit módon időfüggő fizikai mennyiséget:

$$F(p, x) = x - \frac{t}{m} p.$$

- a.) Számítsa ki az $[F, H]$ Poisson-zárójelet (vigyázat, ez nem tűnik el!), és mutassa meg, hogy

$$F \text{ mozgásállandó, azaz } \frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

- b.) Mint gyakorlaton szerepelt a megmaradó mennyiségek mindig szimmetriákat generálnak. Ahhoz, hogy meghatározzuk, mit generál F , az alábbi egyenleteket kell megvizsgálnunk:

$$\frac{dx}{ds} = [x, F]$$

$$\frac{dp}{ds} = [p, F]$$

Fejezze ki a jobboldalon megjelenő Poisson-zárójeleket.

- c.) A b.)-ben kapott egyenletek s szerinti integrálásával adja meg az $x(s)$ és $p(s)$ kifejezéseket, ahol az $x(s=0) = x_0$ és $p(s=0) = p_0$ „kezdeti feltételeket” használhatja.

Láthatja, hogy az $x(s)$ és $p(s)$ kifejezések éppen a Galilei-féle transzformációs összefüggéseket adják, amik valóban szimmetriái egy szabad részecske mozgásának.

B22.) feladat

Egy csatolt oszcillátor-pár Hamilton-függvénye az alábbi alakban van megadva:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) + \frac{1}{2}m\Omega^2(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2)$$

Szeretnénk olyan kanonikus transzformációt végrehajtani, ami átranzformál a rendszer normálkoordinátáiba.

- a.) Keresse az „új” kanonikus impulzusokat az alábbi alakban:

$$P_1 = a(p_1 - p_2)$$

$$P_2 = b(p_1 + p_2)$$

Adja meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy a Hamilton függvény kinetikus energiát leíró tagja az alábbi alakú legyen:

$$\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2)$$

- b.) Keresse az „új” kanonikus koordinátákat az alábbi alakban:

$$Q_1 = c(q_1 - q_2)$$

$$Q_2 = d(q_1 + q_2)$$

Adja meg a c és d paraméterek értékét úgy, hogy a transzformáció kanonikus legyen!

- c.) Adja meg a Hamilton-függvényt az új $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ változók függvényében! Ha jól számolt ez (az eredeti Hamilton-függvény szerencsés alakja miatt) máris normálmódusok szerint szeparált alakban van, azaz nincs $Q_1 Q_2$ szorzat tag a Hamilton függvényben. Mekkora az egyes módusok rezgési frekvenciái?

- d.) Mutassa meg, hogy az alábbi mennyiség időállandó!

$$D = Q_1 P_2 - Q_2 P_1$$

B23.) feladat

Tekintse az alábbi transzformációt:

$$x = \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2)$$

$$y = \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2)$$

$$p_x = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2)$$

$$p_y = -\frac{\alpha}{2}(\sqrt{2P_1} \sin Q_1 - P_2)$$

Legyen $\eta_i = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, $\xi_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix}$!

- a.) Határozza meg az $M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$ mátrixot!

- b.) Mutassa meg, hogy a transzformáció kanonikus, azaz invariánsan hagyja a (4×4 méretű J mátrixszal jellemzett) szimplektikus struktúrát!

B24.) feladat

Egy egy szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye:

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2}$$

- a.) Mutassa meg, hogy az alábbi (explicit módon időfüggő) mennyiség időállandó, azaz értéke a mozgás során állandó!

$$D = \frac{pq}{2} - H(p, q)t$$

- b.) Tekintse a probléma egy lehetséges kétdimenziós általánosítását,

$$H = |\mathbf{p}|^n - a|\mathbf{r}|^{-n}.$$

Mutassa meg, hogy az alábbi mennyiség időállandó:

$$D = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{n} - H t$$

C08.) Feladat

Tekintszen egy n szabadsági fokú csatolt oszcillátorrendszert, aminek a Hamilton-függvénye általánosan az alábbi alakba írható:

$$H = \frac{1}{2} p_i A_{ij} p_j + \frac{1}{2} q_i B_{ij} q_j,$$

ahol A_{ij} és B_{ij} szimmetrikus, pozitív definit mátrixok. Írjon egyszerű számítógépes programot (Matlab, C, python, Mathematica, stb.), ami az A és B mátrixok ismeretében meghatározza a rendszer lehetséges rezgési frekvenciáit, és a normálmódusokat. Mekkora maximális n értéket tud elérni?