MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	A) HF 7

A13 .) feladat

Egy kétdimenziós izotrop haromikus oszcillátor Lagrange-függvénye az alábbi alakú:

$$L(x,v_x,y,v_y)=\frac{1}{2}m\left(v_x{}^2+v_y{}^2\right)-\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)$$

Tekintse az alábbi transzformációt:

$$\begin{aligned}X(x,y,\varphi)&=x\cos\varphi+y\sin\varphi\\ Y(x,y,\varphi)&=-x\sin\varphi+y\cos\varphi\end{aligned}!$$

a.) Adja meg a sebességek transzformációját!

$$V_X(x,v_x,y,v_y,\varphi)=?$$

$$V_Y(x,v_x,y,v_y,\varphi)=?$$

b.) Mutassa meg, hogy a fenti transzformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt, azaz szimmetria! (mutassa meg, hogy $L(X,V_X,Y,V_Y)=L(x,v_x,y,v_y)$)

c.) Írja fel a Noether-tételt a fenti szimmetriatranszformációra! Adja meg a szimmetriához tartozó megmaradó mennyiséget!

d.) Írja fel a Lagrange-függvényből kiindulva a rendszer mozgásegyenleteit!

e.) Mutassa meg közvetlenül a mozgásegyenletekből, hogy a c.)-ben nyert mennyiség valóban megmaradó mennyiség!

A14 .) feladat

Egy két szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H(q_1,p_1,q_2,p_2)=q_1p_1-q_2p_2-Aq_1^2+Bq_2^2,$$

ahol A és B valós állandók.

a.) Adja meg a rendszer Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenleteit!

b.) Tekintse az alábbi mennyiségeket:

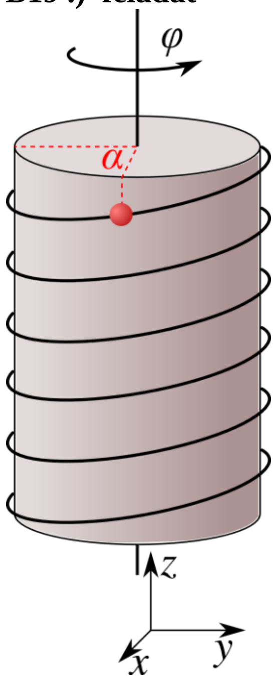
$$F_1(q_1,p_1,q_2,p_2)=\frac{p_1-Aq_1}{q_2}\text{, és } F_2(q_1,p_1,q_2,p_2)=q_1q_2$$

Számítsa ki az $[F_1,H]$ és $[F_2,H]$ Poisson-zárójeleket! Mutassa meg, hogy mindkét mennyiség mozgásállandó!

c.) Számítsa ki az $[F_1,F_2]$ Poisson-zárójelet. Legyen $F_3=[F_1,F_2]$! Mozgásállandó ez?

MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	B) HF 7

B19 .) feladat



Egy kör alapú hengerre egy spirál alakú drótpályát csévéltünk, amin egy *m* tömegű gyöngyszem súrlódás nélkül mozoghat. A henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére Θ, és a tengely körül könnyen (súrlódás nélkül) elfordulhat. A rendszer helyzetét a henger φ elfordulásával és a gyöngyszem α helyzetével írjuk le. A gyöngyszemre hat a külső gravitációs erőtér is.

A gyöngyszem x,y,z koordinátáit a két szöggel az alábbi módon tudjuk kifejezni:

$x = R\sin\alpha$

$y = -R\cos\alpha,$

$z = C(\alpha - \varphi)$

Ahol C jelöli a spirál menetemelkedését.

a.) Konstruálja meg a rendszer Lagrange-függvényét!

b.) Mutassa meg, hogy az alábbi szimmetriatranszformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt:

$\alpha' = \alpha + \theta,$

$\varphi' = \varphi + \theta$

c.) Adja meg a szimmetriához tartozó Noether-féle mozgásállandót! Milyen jól ismert fizikai mennyiséget kapott?

d.) Írja fel a rendszer mozgásegyenleteit!

e.) A *t=0* időpontban az $\alpha = 0$, $\varphi = 0$ pontból indítjuk a rendszert, álló helyzetből. Adja meg a mozgásegyenletek megoldását!

f.) Adja meg a c.)-ben kapott mozgásállandó értékét az e.) feladat adatai esetén, és mutassa meg, hogy valóban állandó az időben!

B20 .) feladat

Egy kétdimenziós izotrop harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi:

$$H = \frac{p_x^{\,2}}{2m} + \frac{p_y^{\,2}}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2).$$

Tekintse az alábbi mátrixot! ($i, j \in \{x, y\}$)

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}\left(p_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j\right),$$

ahol az $r_x = x$ és $r_y = y$ jelölést használtuk. Ez láthatóan egy 2x2-es szimmetrikus mátrix, benne ezért három független mátrixelem található.

a.) Számítsa ki az $[A_{xx},H]$ és $[A_{yy},H]$ Poisson-zárójeleket, és ezzel bizonyítsa be, hogy a mátrix diagonális elemei megmaradó mennyiségek. Mit írnak le?

b.) Számítsa ki az $[A_{xy}, H]$ Poisson zárójelet, és bizonyítsa be, hogy ez is megmaradó mennyiség!

c.) Írja fel a rendszer Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenleteit!

d.) A megoldást keresse az alábbi alakban:

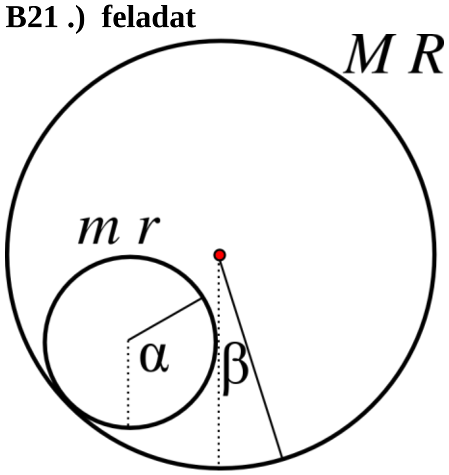
$x(t) = B\sin(\omega t + \theta_1),$

$y(t) = C\sin(\omega t + \theta_2)$

e.) Fejezze ki a *B* és *C* konstansokat az A_{xx} és A_{yy} segítségével!

f.) Fejezze ki a $\theta_1 - \theta_2$ különbséget A_{xx}, A_{yy} és A_{xy} segítségével!

B21 .) feladat



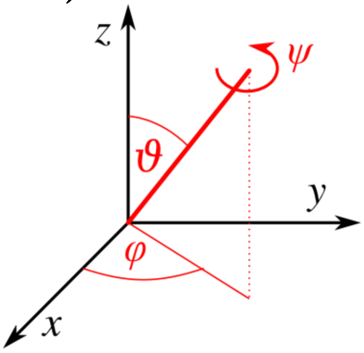
Tekintse a 8. gyakorlat 2. Feladatát!

a.) A Lagrange-függvény Legendre-transzformációjával Határozza meg a Hamilton-függvényt!

b.) Fejezze ki a gyakorlaton levezetett Noether-féle megmaradó mennyiséget (jelöljük A-val!) a kanonikus impulzusok és koordináták segítségével!

c.) Számítsa ki az [A,H] Poisson zárójelet, és ezzel bizonyítsa ismét, hogy A egy megmaradó mennyiség!

C07.) Feladat



Egy homogén tömegeloszlású gömb forgómozgását vizsgáljuk a tömegközépponti rendszerében. A gömb tehetetlenségi nyomaték tenzora diagonális és a diagonálisban szereplő elemek egyenlőek, nagyságukat jelölje Θ. A gömb helyzetét az ún. Euler szögek segítségével írjuk le, melyek (egy lehetséges) definíciójának megértését segíti az ábra: a gömbhöz képzeletben hozzárögzítettünk egy tengelyt (vastag piros vonal), ennek a helyzetét a szokásos gömbi φ, ϑ polárszöggekkel jellemezzük. A piros tengely körüli elfordulását a gömbnek a ψ szög méri.

a.) Mutassa meg, hogy a gömb szögsebességvektora az Euler-szögek segítségével az alábbi alakba írható:

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dot{\vartheta}\sin\varphi+\dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \dot{\vartheta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi\\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

b.) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét, határozza meg a kanonikus impulzusokat és ezek segítségével építse fel a Hamilton-függvényt!

c.) Adja meg a rendszer impulzusmomentumvektorát ($\mathbf{L}=\Theta\boldsymbol{\omega}$) a kanonikus impulzusok és koordináták (azaz az Euler-szögek) segítségével!

d.) Mutassa meg, hogy a rendszer Hamilton-függvénye az impulzusmomentum vektor segítségével az alábbi tömörebb alakba írható:

$$H=\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}}{2\Theta}$$

e.) Mutassa meg, hogy az impulzusmomentum c.)-ben levezetett komponensei teljesítik a gyakorlaton levezetett Poisson-zárójel relációkat:

$$[L_i,L_j]=\varepsilon_{ijk}L_k$$

ez alapján mutassa meg a $\frac{d}{dt}L_i=[L_i,H]$ egyenletet használva, hogy az impulzusmomentum a modellben megmarad.

Most tekintsünk egy olyan esetet, amikor a gömböt homogén töltéseloszlásúra töltjük fel. Tegyük a gömböt homogén, z-irányú mágneses térbe. Ekkor megmutatható (Elektrodinamika gyakorlaton/előadáson biztosan lesz ilyen feladat), hogy az így létrejött mágneses momentum energiája arányos az $\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}$ skaláris szorzattal, azaz esetünkben a Hamilton-függvény az alábbi szerint módosul:

$$H=\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}}{2\Theta}-\gamma B L_z\,,$$

ahol γ egy konstans.

f.) Az impulzusmomentum Poisson-zárójeleit felhasználva írja fel ez utóbbi esetben az impulzusmomentum komponensek mozgásegyenleteit.

g.) Oldja meg a mozgásegyenleteket különböző kezdeti feltétel esetén. Milyen mozgást végez az impulzusmomentum vektor?