

A11.) feladat

Ebben a feladatban a célunk megmutatni, hogy az elektrosztatika alapegyenlete, a Poisson-egyenlet levezethető variációs elvből. Egy $\rho(\mathbf{r})$, időben állandó elektromos töltéeloszlás által létrehozott elektromos tér energiája az alábbi integrállal fejezhető ki:

$$U = \int d^3r \left(-\frac{\epsilon_0}{2} (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 + \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \right) = \int d^3r \left(-\frac{\epsilon_0}{2} \left((\partial_x \phi(\mathbf{r}))^2 + (\partial_y \phi(\mathbf{r}))^2 + (\partial_z \phi(\mathbf{r}))^2 \right) + \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \right),$$

ahol $\phi(\mathbf{r})$ az elektromos potenciál, melyből az elektromos térerősség az $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ formulával számítható.

Az állítás az, hogy a kialakult elektromos tér olyan, hogy az minimalizálja a fenti energia funkcionált. A határfeltételt úgy szokás felvenni, hogy $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$, azaz a potenciál nulla szintjét a végtelenben vesszük fel.

a.) Feltéve, hogy a potenciálfüggvényt a $\delta\phi(\mathbf{r})$ infinitezimális függvénnyel variáltuk, írja fel az U energiafunkcionál δU variációját!

b.) Parciális integrálás segítségével érje el, hogy a $\delta\phi(\mathbf{r})$ variáció deriváltjai már ne jelenjenek meg a kifejezésben, azaz hozza a funkcionál variációját az alábbi alakra:

$$\delta U = \int d^3r M(\mathbf{r}) \delta\phi(\mathbf{r})!$$

Adja meg az $M(\mathbf{r})$ függvény kifejezését $\rho(\mathbf{r})$ és $\phi(\mathbf{r})$ segítségével! A parciális integrálás felületi tagjait dobja el! (Megj: A felületi tagokról megmutatható, ha $\rho(\mathbf{r})$ csak egy véges térfogatban nem nulla, úgy eldobhatóak.)

c.) Az energia minimális, ha δU eltűnik tetszőleges variációra. Ez ekvivalens az $M(\mathbf{r}) = 0$ egyenlettel. Mutassa meg, hogy ez éppen az elektrosztatika Poisson-egyenlete!

A12.) feladat

Egy egydimenziós folytonos közeg Lagrange sűrűsége az alábbi alakú:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_t \psi)(\partial_x \psi) + \frac{\alpha}{6} (\partial_x \psi)^3 - \frac{\nu}{2} (\partial_x^2 \psi)^2,$$

ahol a $\psi(x,t)$ mezővel írjuk le a közeget.

a.) A Lagrange-sűrűség segítségével írja fel az S hatás funkcionált!

b.) Írja fel a hatás δS variációjának kifejezését!

c.) Parciális integrálások segítségével érje el, hogy a hatás variációja az alábbi alakú legyen:

$$\delta S = \int dt \int dx M(x,t) \delta\psi(x,t)!$$

Fejezze ki $M(x,t)$ függvényt a ψ mező és deriváltjainak segítségével! A megjelenő peremtagokat dobja ki!

d.) Írja fel az energiasűrűség kifejezését a modellben!

$$\varepsilon = \partial_t \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} - \mathcal{L}$$

B16.) feladat

Egy homogén izotrop rugalmas közeg Lagrange-sűrűsége az alábbi alakú:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} (\partial_t \mathbf{s}) \cdot (\partial_t \mathbf{s}) - \frac{\lambda}{2} (\partial_x s_x + \partial_y s_y + \partial_z s_z)^2 - \mu [(\partial_x s_x)^2 + (\partial_y s_y)^2 + (\partial_z s_z)^2],$$

Ahol $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = (s_x(\mathbf{r}, t), s_y(\mathbf{r}, t), s_z(\mathbf{r}, t))$ a közeg elmozdulás-mezője, ρ a sűrűség, λ és μ pedig a Lamé-állandók.

- Írja fel a közegre a hatás-funkcionált!
- Adja meg a közeg Euler-Lagrange féle mozgásegyenleteit!
- Mutassa meg, hogy $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{s}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ síkhullám megoldások megoldják a mozgásegyenletet!
- Behelyettesítve a c.)-ben szereplő próbafüggvényt a mozgásegyenletbe a következő alakú összefüggést nyeri \mathbf{s}_0 , \mathbf{k} és ω között:

$$\underline{M}(\omega, \mathbf{k}) \underline{s}_0 = \underline{0}$$
 Adja meg az M mátrixot!
- Haladjon a síkhullám a +x irányba, k nagyságú hullámszámvektorral! Adja meg ebben a speciális esetben is az M mátrixot!
- A d.)-ben szereplő egyenletnek csak akkor lehet nemzérus megoldása \mathbf{s}_0 -ra, ha a mátrix determinánsa 0. Ez alapján milyen lehetséges $\omega(\mathbf{k})$ összefüggéseket kap?
- Milyenek a lehetséges \mathbf{s}_0 vektorok?

B17.) feladat

Tekintse az alábbi Lagrange-sűrűséget:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x \psi^*(x, t)) (\partial_x \psi(x, t)) - V(x) \psi^*(x, t) \psi(x, t) + \frac{1}{2} i \hbar (\psi^*(x, t) \partial_t \psi(x, t) - \psi(x, t) \partial_t \psi^*(x, t)),$$

Ahol $\psi(x, t)$ egy komplex értékeket felvevő mező, $\psi^*(x, t)$ a mező komplex konjugáltját jelöli.

Előadáson ebből úgy vezették le a mozgásegyenletet, hogy a mezőt és annak komplex konjugáltjának variációját függetlennek tekintették (azaz egyszer variáltak $\delta\psi^*$ szerint úgy, hogy $\psi(x, t)$ -t változatlanul hagyták, egyszer pedig $\delta\psi$ szerint úgy, hogy $\psi^*(x, t)$ -t hagyták változatlanul.) Ez a módszer elsőre nagyon furcsa, ezért érdemes megoldani gyalogosabb módon is a feladatot.

- Kezelje a komplex hullámfüggvény valós és képzetes részét, mint egy két komponensű mezőt:

$$\psi(x, t) = \phi_1(x, t) + i \phi_2(x, t),$$
 ahol $\phi_1(x, t)$ és $\phi_2(x, t)$ már tisztességes valós függvények.
 Írja át a Lagrange-sűrűséget úgy, hogy benne ezek a valós mezők szerepeljenek!
- Mutassa meg, hogy a kapott Lagrange-sűrűség tisztán valós!
- Írja fel a hatás funkcionált!
- Írja fel az Euler-Lagrange egyenleteket amiket a ϕ_1 és ϕ_2 szerinti variálás után kapott.
- Mutassa meg, hogy a két egyenlet amit kapott, a szokásos:

$$i \hbar \partial_t \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$$

alakú Schrödinger egyenlet valós és képzetes része!

B18.) feladat

Egy L oldalú négyzet alakú fémkeretre szappanhártyát feszítettünk ki. Ebben a feladatban a célunk a szappanhártya állóhullám módusainak meghatározása. A szappanhártya felületi tömegsűrűségét jelölje λ , a felületi feszültségét pedig σ !

A szappanhártya Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \lambda (\partial_t u)^2 - 2\sigma \sqrt{1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2},$$

ahol $u(x,y,t)$ a szappanhártya fémkeretre merőleges irányú kitérését jelöli. Az első tag a kinetikus energia járulék, a második a szappanhártya felületi energiájából származó járulék.

- a.) Közelítse a Lagrange-sűrűségben szereplő gyökös tagot a deriváltakban másodrendig!
- b.) Írja fel az Euler-Lagrange féle mozgásegyenleteket!

A peremfeltételünk szerint a négyzetes keret pontjaiban az $u(x,y,t)$ függvény zérus, azaz $u(0,y,t) = u(x,0,t) = u(L,y,t) = u(x,L,t) = 0$.

- c.) Keresse a mozgásegyenletek állóhullám-megoldásait az alábbi alakban:

$$u(x, y, t) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t + \varphi)!$$

Mik a k_x és k_y hullámszámok peremfeltételek által megengedett lehetséges értékei?

- d.) Adjuk meg a k_x és k_y hullámszámokkal jellemzett módus ω körfrekvenciáját!
-

C06.) feladat

Egy hajlékony, L hosszúságú láncot a plafonhoz rögzítettünk, a lánc szabadon lóg. Lineáris sűrűségét jelöljük λ -val, a gravitációs gyorsulás lefelé mutat, értéke g . A célunk a láncon kialakuló kis kitérésű transzverzális hullámok leírása.

A lánc vízszintes kitérését jelöljük $\psi(z,t)$ -vel. Elsőként a célunk megadni a lánc gravitációs helyzeti energiáját a kitérés függvényében. A plafon legyen a $z=0$ pont, a lánc vége pedig a $z=L$.

- a.) Tekintse a lánc z helyen lévő dz hosszúságú darabkáját. Mutassa meg, hogy ennek emelkedése a nyugalmi helyzethez képest:

$$h(z,t) = \int_0^z dz' \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \psi(z',t)}{\partial z'} \right)^2} \right\}$$

- b.) Ez alapján mutassa meg, hogy a hatásfunktional a láncre az alábbi alakot ölti:

$$S = \int dt \int_0^L dz \frac{\lambda}{2} (\partial_t \psi)^2 - \int dt \int_0^L dz \int_0^z dz' \lambda g \left\{ 1 - \sqrt{1 - (\partial_{z'} \psi(z',t))^2} \right\}$$

Láthatóan a második tag az eddigiekhez képest furcsa, ugyanis kétszeres integrál szerepel benne.

- c.) Cserélje fel a z és z' szerinti integrálok sorrendjét, és mutassa meg, hogy a hatás az alábbi alakba írható:

$$S = \int dt \int_0^L dz \left\{ \frac{\lambda}{2} (\partial_t \psi)^2 - \lambda g (L-z) \left(1 - \sqrt{1 - (\partial_z \psi(z,t))^2} \right) \right\}$$

Hogyan tudná értelmezni a második tagot?

- d.) Közelítse a hatást kis kitérések esetére kvadratikusan rendig. Írja fel az Euler-Lagrange egyenleteket!
- e.) Keresse a megoldást $\psi(z,t) = \varphi(z)e^{i\omega t}$ alakban. Milyen egyenletet nyer $\varphi(z)$ -re?
- f.) Oldja meg (numerikusan, szoftverrel) az egyenletet, és ábrázolja különböző ω -kra a hullámzó lánc alakját!