MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	A) HF 4.

A 07.) feladat

Tanulmányai során már nagyon korán találkozott Pascal törvényével, ami kimondja: egy nyugvó folyadékban a nyomás izotrop, azaz a folyadékba helyezett „mérőfelületre” ható nyomóerő független a felület irányától.

Ezt a feszültségtenzor bevezetésével másként is megfogalmazhatjuk. Tudjuk, hogy egy nyugvó folyadékban nyírófeszültségek nem ébrednek, azok ugyanis a sebességmező deriváltjaival arányosak, nyugvó folyadékban pedig minden sebesség zérus.

Pascal törvénye tehát erre az esetre átfogalmazva: Amennyiben egy közegben minden nyírófeszültség eltűnik, úgy a feszültségtenzor arányos az egységmátrixszal. (~ a nyomás izotrop.)

Ebben a feladatban ezt a tételt kell belátnia indirekt bizonyítással.

Tegye fel, hogy a feszültségtenzor diagonális, de a diagonális elemei nem egyenlőek:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

azaz pl. $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$.

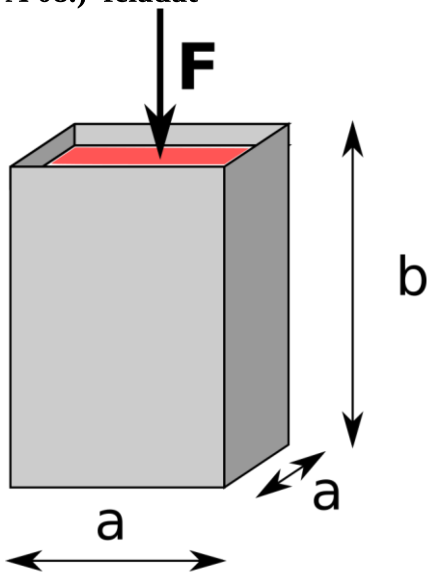
a.) Írja fel azon mátrixot, ami elforgatja a koordinátarendszerünket a z tengely körül valamely α szöggel!

b.) Határozza meg a feszültségtenzor elemeit ebben az α szöggel elforgatott koordinátarendszerben!

c.) Adja meg az új koordinátarendszerben a σ'_{xy} nyírófeszültséget $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$ esetén!

d.) Mutassa meg, hogy tetszőleges α szögű forgatás esetén csak akkor tűnik el a σ'_{xy} nyírófeszültség, ha $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$!

A 08.) feladat



Egy merev dobozba könnyű, rugalmas anyagot töltöttünk. A doboz alapja egy *a* oldalú négyzet, magassága *b*. Az anyag nem tapad a doboz falaihoz, csak zselészerűen kitölti a dobozt a felszínéig. A közeg Lamé-állandói μ és λ.

Felülről egyelőre ismeretlen *F* erővel nyomni kezdjük az anyag felszínét, aminek hatására az Δb magasságnyit benyomódott.

a.) Adja meg a közeg deformációtenzorát!

b.) Írja fel a Hooke-törvényt a közegre!

c.) Fejezze ki a feszültségtenzor zérustól különböző elemeit! (σ_{xx}, σ_{yy} és σ_{zz}.)

d.) Adja meg az ismeretlen F nyomóerőt!

MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	B) HF 4.

B10 .) feladat

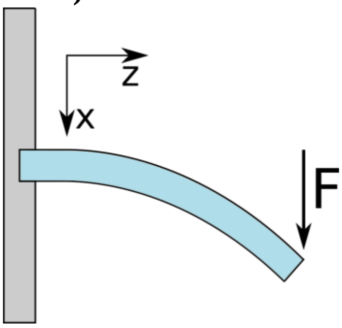
Egy A keresztmetsztű L (nyújtatlan) hosszúságú ρ (nem elhanyagolható) sűrűségű homogén hasábot lágyan a plafonhoz ragasztottunk. A hasáb a saját súlya miatt megnyúlik, a feladat első részében ezt a megnyúlást kell vizsgálnia. A hasáb anyagának Lamé-állandói μ és λ.
Legyen az origó a plafonon, a z tengely mutasson lefelé, a hasáb hosszirányába!

a.) Írja fel a hasábban ébredő σ_{zz} feszültséget a z függvényében! (A feszültségtenzor többi eleme zérus)
b.) Hooke törvény segítségével fejezze ki a deformációtenzor ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz} elemeit a z függvényében!
c.) ε_{zz} ismeretében határozza meg a hasáb egyes pontjainak s_z elmozdulását!
d.) Mekkora a rúd ΔL megnyúlása?

A rúd végét ezután F erővel húzni kezdjük lefelé. Ismételje meg az előző részfeladatokat erre az esetre, azaz

e.) Írja fel a hasábban ébredő σ_{zz} feszültséget a z függvényében!
f.) Hooke törvény segítségével fejezze ki a deformációtenzor ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz} elemeit a z függvényében!
g.) ε_{zz} ismeretében határozza meg a hasáb egyes pontjainak s_z elmozdulását!
h.) Mekkora a rúd ΔL megnyúlása?

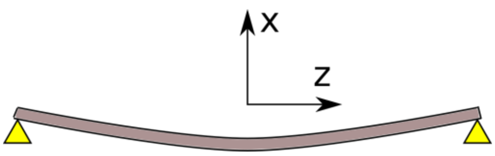
B11 .) feladat



Egy keskeny, könnyű, L hosszúságú rudat az egyik végén vízszintesen befalaztunk, a másik végét függőlegesen F erővel nyomjuk lefelé. Legyen a rúd (terheletlen) tengelye a z tengely, az F erő iránya az x tengely. A rúd Young-modulusa E, keresztmetszeti tényezője Θ.

a.) Adjuk meg a rúdban ébredő hajlító nyomatékot z függvényében!
b.) Írjuk fel a rúd alakját meghatározó differenciálegyenletet!
c.) Adjuk meg a rúd alakját! Mennyivel hajlik le a rúd terhelt vége?

B12 .) feladat



Egy rugalmas pallót két ékre helyeztünk, ahogy az ábra is mutatja. A palló végpontjai a $z=\pm L/2$ helyeken találhatók. A palló anyagának Young-modulusa E, a keresztmetszeti tényező Θ. A palló össztömege $m_ö$.

a.) Adja meg a két éknél fellépő tartóerőket!
b.) Adja meg a pallóban ébredő hajlítónyomatékot a z függvényében!
c.) Adja meg a palló alakját meghatározó differenciálegyenletet!
d.) Oldja meg a differenciálegyenletet, adja meg a megoldást annak ismeretében, hogy a két éknél a palló elmozdulása zérus.
e.) Mekkora a palló középpontjának a süllyedése?

MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	C) HF 4.

C04.) Feladat

Egy rugalmas rúd hossztengelye a z tengely, ami körül a rudat megcsavartuk, a csavarás erősségét a

$$\tau = \frac{d\varphi}{dz}$$

csavarási erősséggel jellemezhetjük, ahol $\varphi(z)$ a rúd egyes rétegeinek egy kiszemelt referenciaréteghez (z = 0) viszonyított elfordulása.

A rúd pontjainak elmozdulásvektorának x és y koordinátája ezért a z = 0 körül jó közelítéssel az alábbi alakba írható:

$$s_x(x, y, z \approx 0) = -\tau\, z\, y$$

$$s_y(x, y, z \approx 0) = +\tau\, z\, x$$

A csavarodás miatt a pontok a z irányban is elmozdulhatnak, azonban ezt az elmozdulást nem tudjuk csuklóból felírni, ezért az alábbi alakban keressük:

$$s_z(x, y, z \approx 0) = \tau\, \psi(x, y),$$

ahol ψ(x,y) a rúd rétegeinek torzulását leíró ún. csavarási függvény.

a.) Írja fel a rúd deformációtenzorát a $z=0$ körül!

b.) A μ és λ Lamé-állandók ismeretében írja fel a feszültségtenzort is!

c.) Minthogy külső térfogati erő nem hat a rúdra, az egyensúlyát a $\partial_j \sigma_{ij} = 0$ egyenlet szolgáltatja. Írja fel ezt az egyenletet a b.) feladatban kapott feszültségtenzorra, és mutassa meg, hogy ebből a $\Delta\psi(x, y) = 0$ egyenletet nyeri a csavarási függvényre!

A c.) feladatban kapott egyenlet nagyon egyszerűnek tűnhet, azonban a legtöbb esetben nem tudunk könnyen peremfeltételeket találni a csavarási függvényre, ezért szokás bevezetni a χ(x,y) segédfüggvényt, amit az alábbi módon definiálunk:

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

$$\sigma_{yz} = -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

d.) Mutassa meg, hogy ezek az alakok azonnal teljesítik a c.) feladatban felírt egyensúlyi egyenleteket!

e.) Összevetve a b.) feladat eredményeivel mutassa meg, hogy a χ segédfüggvény a következő kapcsolatban van a csavarási függvénnyel:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y + 2\frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x - 2\frac{\partial \chi}{\partial x}$$

f.) Deriválja az első egyenletet y szerint, a másodikat x szerint, majd vonja ki az elsőből a másodikat. Mutassa meg, hogy a segédfüggvény megoldja a $\Delta\chi = -1$ egyenletet!

g.) Kihasználva, hogy a rúd palástján külső erő nem hat, mutassa meg, hogy χ=*const.* a rúd palástján.