

**A05.) feladat**

Az atommag-atommag ütközések egyszerűsített relativisztikus modelljében, egy  $m_1$  nyugalmi tömegű és  $v_1$  (szokásos) sebességű atommag ütközik egy  $m_2$  nyugalmi tömegű, kezdetben álló atommagnak. Az ütközés után egy magasan gerjesztett kompozit jön létre, melynek sebességét jelöljük  $v_0$ -al, és a „nyugalmi” tömegét  $m_0$ -al.

(Megj.: Az idézőjellel azt éreztettük, hogy ez a kompozit vélhetően magasan gerjesztett állapotban van, ezért a nyugalmi tömeg elnevezés nem a legkorrektebb.)

- Írja fel a két mag ütközés előtti négyes impulzusait.
- Írja fel a (négyes) impulzusmegmaradás törvényét az ütközésre, és ez alapján fejezze ki a kompozit négyes impulzusát az ütközés után!
- Ismeretes, hogy a négyesimpulzus Minkowski-hossza Lorentz-invariáns. Ezt felhasználva fejezze ki a kompozit  $m_0$  „nyugalmi” tömegét!
- Határozza meg a kompozit  $v_0$  sebességét! Fejezze ki ennek numerikus értékét, ha  $m_1 = 40u_a$ ,  $m_2 = 238u_a$ , és  $v_1 = 0,8c$ , ahol  $u_a$  az atomi tömegegységet jelöli.

**A06.) feladat**

Két foton terjedését vizsgáljuk. Egyikük négyesimpulzus vektora  $q_1^\mu = (q, q, 0, 0)$ , a másiké  $q_2^\mu = (2q, -q, \sqrt{3}q, 0)$ .

- A megadott négyesimpulzusok Minkowski-hossznégyszetének kiszámításával mutassa meg, ezek valóban lehetnek fotonok négyesimpulzusai!
- Adja meg a két foton négyesimpulzusainak összegét! Milyen négyesvektor ez (térszerű/időszerű/fényszerű)?  
(Megj: térszerű egy négyesvektor, aminek a Minkowski hossznegyzete negatív, időszerű aminek pozitív, fényszerű aminek nulla.)
- Keressen olyan, ( $y$  irányba mozgó) inerciarendszert, melyben a két foton össz (hármass-) impulzusa éppen zérus. (Ezt joggal nevezhetjük a kétfotonos rendszer tömegközépponti rendszerének.)
- A c.) feladatban kapott inerciarendszerbe vivő transzformáció alkalmazásával adja meg az egyes fotonok  $q_1'^\mu$  és  $q_2'^\mu$  négyesimpulzusait a „tömegközépponti” rendszerben. Mekkora az egyes fotonok energiája, és mit mondhatunk mozgásuk irányáról?

**B07.) feladat**

Gyakorlaton szerepelt a relativisztikus rakéta modellje. Ezt általánosítva most a „fotonrakéta” modelljét kell vizsgálnia. A rakéta kezdeti nyugalmi tömege  $M_0$ , a rakéta hajtóműve egy igen intenzív fotonnyalábot bocsájt ki, ez biztosítja a meghajtást. Az egyszerűség kedvéért a rakéta mozogjon egyenes pályán!

- Tekintse azt a pillanatot, amikor a rakéta nyugalmi tömege  $M$ . Üljön be a rakétával (pillanatnyilag) együttmozgó rendszerbe. A hajtómű kisugároz  $d\varepsilon$  fotoenergiát. Ez alapján adja meg a rakéta nyugalmi tömegének csökkenését!
- Adja meg az előbbi esetben a rakéta  $dv$  sebességváltozását! Ebből adja meg a rakéta  $d\theta$  rapiditásváltozását is!
- A fotonrakétával a Naphoz képest  $3/5c$  utazósebességet szeretnénk elérni. Nyugalmi tömegének hány százalékát kell ehhez elveszítenie a rakétának?
- Mutassuk meg, hogy a c.) feladatban kapott tömegveszteség kisebb, mint a gyakorlaton szereplő szokásos rakéta esetén!
- A rakétával szeretnénk elutazni az Alpha Centauri rendszerbe, ami a Naprendszerből  $4,3$  fényévre található. Ehhez először fel kell gyorsítani  $3/5c$  sebességre, majd lefékezni. Feltehetjük, hogy az Alpha Centauri Naphoz képest mért sebessége a fénysebességhez képest elhanyagolható. Hány százalékkal csökken az űrhajó tömege az utazás végére?
- Feltéve, hogy a gyorsítás és lassítás elhanyagolható időt vesz igénybe az utazás összidejéhez képest, hány évet öregsenek az űrhajó utasai az utazás során?

**B08.) feladat**

Egy  $m_0$  nyugalmi tömegű  $q$  töltésű részecskét homogén  $E$  nagyságú statikus elektromos térbe lőttünk, az elektromos térre merőlegesen,  $v_0$  kezdeti sebességgel. Írjuk le a részecske mozgását! Legyen az elektromos tér  $y$  irányú, a részecske kezdeti sebessége pedig mutasson az  $x$  irányba!

- Adja meg a részecske mozgását nemrelativisztikus közelítésben!
- Írja fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!
- Oldja meg a mozgásegyenletet a részecske impulzusára, azaz adjuk meg a  $p_x(t)$  és  $p_y(t)$  függvényeket!
- Fejezze ki a (hároms)impulzusvektor hosszát az idő függvényében, és ebből határozza meg a sebesség nagyságát az idő függvényében! ( $|\vec{v}(t)| = ?$ )
- Adja meg a részecske sebességvektorának  $v_x(t)$  és  $v_y(t)$  komponenseit!
- Gyakorlásként oldja meg a feladatot az órán is látott relativisztikusan kovariáns egyenlet segítségével:

$$m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = qF^\mu{}_\nu u^\nu.$$

Mik a kezdeti feltételek?

**B09.) feladat**

Egy  $q$  töltésű  $m_0$  nyugalmi tömegű részecske homogén,  $z$ -irányú,  $\mathbf{B} = (0,0,B)$  mágneses indukciójú térben mozog. A részecske sebessége a  $t=0$  időpontban  $\mathbf{v}_0 = \left(0, \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$ , azaz nem merőleges a mágneses tér irányára. Írja le a részecske mozgását!

- Írja fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!
- Mutassa meg, hogy a részecske szokásos (hároms) sebességvektorának nagysága az időben állandó.

c.) Ezt felhasználva írja fel a mozgásegyenletet  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ -re!

d.) Mutassa meg, hogy az egyenlet kezdeti feltételeknek is megfelelő megoldása az alábbi alakot ölti:

$$\mathbf{v}(t) = \left( -\frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin(\Omega t), \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cos(\Omega t), \frac{v_0}{\sqrt{2}} \right)$$

Adja meg  $\Omega$  értékét!

e.) Hozzávetőlegesen rajzolja fel a részecske háromdimenziós pályáját!

f.) Gyakorlásként oldja meg a feladatot az órán is látott relativisztikusan kovariáns egyenlet segítségével:

$$m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = q F^\mu{}_\nu u^\nu.$$

Mik a kezdeti feltételek?

---

**C03.) feladat**

Gyakorlaton és a B07.) feladatban is láthattuk, hogy egy relativisztikusan gyors űrhajó, amivel emberi léptékű idő alatt elérhetőek a legközelebbi csillagok, nagyon sok üzemanyagot használ. Ezért a következő ötletet eszeltük ki:

Az űrhajónk nem cipeli magával az üzemanyagot, helyette egy nagyméretű, fénytükröző „vitorlával” szereljük fel. A Földön létrehozunk egy igen erős, jól fókuszált fotonnyalábot, ezzel megcélozzuk az űrhajó vitorláját. A fény a vitorláról gyakorlatilag  $180^\circ$ -ban visszaverődik, így adva impulzust az űrhajónak. A fékezést hasonló módon oldjuk meg, a célállomáson is létrehozunk egy fotonnyalábot, és érkezés előtt ezt az űrhajóra irányítva lefékezzük azt.

A célunk ismét az, hogy  $3/5c$  utazósebességre gyorsítsuk az űrhajót, aminek nyugalmi tömege  $M_h$ . (Ez a hasznos tömeg, amit el akarunk juttatni a célba)

- a.) Adja meg, a Földi fotonforrásnak összesen mekkora  $\varepsilon_{gy}$  energiányi fényt kell az űrhajóra sugározni, hogy az elérje az utazósebességet! Legyen óvatos a visszaverődő fény frekvenciájával!
- b.) Adja meg, a célállomás fotonforrásának összesen mekkora  $\varepsilon_f$  energiányi fényt kell az űrhajóra sugározni, hogy azt lefékezze!
- c.) Mennyi energiát spórolunk így összesen a B07.) feladatban szereplő fotonrakétához képest?