MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	A) HF 2

A03.) feladat

Az Alpha Centauri rendszerből és a Földről is elindul egy-egy űrtranszport, azonban egy baleset folytán mind a két űrhajó üzemanyaga elszökött, így elkerülhetetlenül össze fognak ütközni. A Földi megfigyelő azt állítja, hogy (már a balesetek után) az egyik űrhajó $v_1 = \frac{3}{5}c$ sebességgel távolodik a Földdtől, a másik $v_2 = \frac{4}{5}c$ sebességgel közeledik a Földhöz. A két űrhajó közös pályája jelöli ki az x tengelyt, ami mutasson a Földtől elfelé!

a.) Írja fel a földi megfigyelő rendszerében az egyes űrhajók négyes-sebességeit!
b.) Írja fel azon Lorentz-transzformáció mátrixát, ami átvisz az „1”-es űrhajóhoz rögzített rendszerbe!
c.) Adja meg a „2”-es űrhajó négyes-sebességét ebben a rendszerben!
d.) Mekkora (szokásos) sebességgel közeledik a „2”-es űrhajó az „1”-eshez ebben a rendszerben?
e.) Most írja fel azon Lorentz-transzformáció mátrixát, ami a Földhöz rögzített rendszerből a „2”-es űrhajóhoz rögzített rendszerbe transzformál
f.) Adja meg az „1”-es űrhajó négyes-sebességét ebben a rendszerben!
g.) Mekkora az „1”-es űrhajó szokásos sebessége ebben a rendszerben?

A04.) feladat

Megállít minket egy űr-rendőr, és meg szeretne büntetni, ugyanis áthajtottunk egy piros lámpán. Azzal az érveléssel próbálunk védekezni, hogy olyan sebességgel közelítettük meg a lámpát, hogy a Doppler-effektus miatt már zöldnek láttuk a pirosat. Tudjuk, hogy a piros fény hullámhossza $\lambda_p = 650$ nm, a zöldé $\lambda_z = 530$ nm. A kérdés az, mekkora sebességgel kell közelítsünk a lámpához, hogy az érvelésünk helytálló legyen?

Jelölje ki az űrhajónk és a lámpa egyenese az x-tengelyt, a sebességünket jelöljük v-vel, és mozogjunk a $+x$ irányba!

a.) Írja fel a lámpához rögzített rendszerben az űrhajóval szemben haladó piros fény négyes-hullámszám vektorát!
b.) Írja fel azon Lorentz-transzformáció mátrixát, ami átvisz az űrhajónkhoz rögzített rendszerbe?
c.) Transzformálja át a négyes-hullámszámot az űrhajóhoz rögzített rendszerbe!
d.) Adja meg a Doppler-eltolódott fény hullámhosszát az űrhajó sebességének függvényében!
e.) Mekkora volt az űrhajó sebessége, ha zöldnek látta a pirosat?

MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	B) HF 2

B04.) feladat

Egy űrhajó adó-vevő antennája ν_0 frekvenciával rádió impulzusokat bocsát ki és érzékeli a bejövő impulzusokat. Az űrhajó állandó sebességgel távolodik a Földtől. Mindeközben, folyamatosan rádió impulzusokat küld a Földre amelyek onnan visszaverődnek és a visszavert jelet az űrhajó vevőantennája érzékeli.

A jelenség leírásához a koordinátarendszereket a következőképpen rögzítettük: A Földhöz rögzített rendszerben az űrhajó a +x irányba, az űrhajóhoz rögzített rendszerben a Föld a –x irányba mozog.

a.) Írja fel az űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a Föld irányában haladó rádiójel hullámszám négyesvektorát! $(k^\mu = (\omega/c, k^1, k^2, k^3))$

b.) Feltéve, hogy ismeri az űrhajó V sebességét, adja meg egy Lorentz transzformáció $\Lambda^\mu_{\cdot\nu}$ mátrixát, amely az űrhajóhoz rögzített rendszerből áttranszformál a Földhöz rögzített rendszerbe!

c.) Transzformálja át az a.) feladatban felírt hullámszám négyesvektort a Földhöz rögzített rendszerbe. Mekkorának méri a földi állomás a jel frekvenciáját?

d.) A rádióhullám a Földről visszaverődik az űrhajó irányába. Adja meg a visszavert hullám hullámszám négyesvektorát a Földhöz rögzített rendszerben!

e.) A d.)-ben kapott hullámszám négyesvektort transzformálja vissza az űrhajóhoz rögzített rendszerbe. Mekkorának adódik az űrhajó által érzékelt frekvencia?

f.) Az űrhajó a visszavert jel frekvenciáját $\nu_1 = \nu_0/2$-nek méri. Ez alapján adja meg az űrhajó Földhöz viszonyított V sebességét!

B05.) feladat

Kísérleti tapasztalat, hogy a részecskék elektromos töltése Lorentz-invariáns, azaz egy gyorsan mozgó részecske töltése nem változik meg az állóhoz képest. Másik kísérleti tapasztalat, hogy az elektromos töltés megmaradó mennyiség, azaz a tér egy pontjából csak úgy tűnhet el, ha kiáramlik onnan. Ezt a megmaradási tételt fejezi ki a töltés kontinuitási egyenlete, amit az alábbi alakban szokás felírni:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

a.) Írja át ezt az egyenletet úgy, hogy benne térjen át a négyes téridő koordináták (x^0, x^1, x^2, x^3) szerinti deriválásra!

b.) Az a.) feladatban kapott egyenlet az alábbi alakot ölti: $\partial_\mu j^\mu = 0$. Olvassa le a j^μ komponenseit!

c.) Gyakorlaton szerepelt, hogy a $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ deriválás tisztességes alsóindexes vektorként transzformálódik. Ha azt szeretnénk, hogy a töltés-kontinuitási egyenlet minden vonatkoztatási rendszerben a fenti alakban fennálljon, úgy mutassuk meg, hogy j^μ egy tisztességes felsőindexes négyesvektor!

d.) Láthatjuk, hogy a négyes áramsűrűség vektor nulladik komponense lényegében a töltéssűrűség. Tekintsünk egy olyan elrendezést, ahol álló töltések egyenletesen töltik ki a teret, azaz ρ_e = const., $\mathbf{j} = 0$. Transzformáljuk át ezt a töltéselrendezést egy v sebességgel x irányba mozgó rendszerbe! Mit kaptunk?

e.) Hogyan értelmezhető, hogy a töltéssűrűség megnövekedett? (Gondoljon a Lorentz-kontrakcióra!)

(**Fontos megjegyzés**: *Ezt a feladatot direkt nem tömegsűrűséggel írtuk fel, ugyanis tudjuk, egy gyorsan mozgó részecske tömege relativisztikusan megnövekszik. Mint kiderül a tömegsűrűség* *(korrektebbül energiasűrűség) és tömegáramsűrűség (korrektebbül impulzussűrűség) egy csúnyább jószág, a $T^{\mu\nu}$ energia-impulzus négyestenzor elemei.*)

B06.) feladat

Egy űrhajó távolodik a Földdtől, bizonyos okokból a leíráshoz nem a legkényelmesebb koordinátarendszert választottuk, az űrhajó (hármas) sebességvektora: $\vec{v} = (c/2, c/2, 0)$.

a.) Adja meg az űrhajó négyes-sebesség vektorát!

Egy fizikushallgató azt kapta házi feladatként, hogy adjon meg egy olyan Lorentz-transzformációt, ami áttranszformál a Föld rendszeréből az űrhajóval együttmozgó rendszerbe. Mivel megszakadt az internet hozzáférése, és csupán arra a speciális esetre emlékszik, amikor a mozgó rendszer sebessége valamelyik koordinátatengely irányába mutat, ezért a következő megoldást eszeli ki:

- Először áttranszformál egy olyan rendszerbe, ami a Földhöz képest a $+x$ irányba mozog éppen olyan sebességgel, hogy az új rendszerben az űrhajó már csak az (új rendszer-beli) y irányba mozog. Az új vonatkoztatási rendszer Földhöz képest mért sebességét jelöljük V_1-el.
- Ezután végrehajt egy $+y$ irányú boostot V_2 sebességgel, és így abba a rendszerbe jutott, ahol az űrhajó áll.

b.) Adja meg, mekkora az első boost $+x$ irányú V_1 sebessége!

c.) Adja meg az űrhajó négyes-sebességét ebben a „köztes” rendszerben! Mekkora az űrhajó szokásos V_2 sebessége ebben a rendszerben?

d.) A c.) feladat alapján adja meg azt a (teljes) Lorentz-transzformációt, ami a Földhöz rögzített rendszerből az űrhajó rendszerébe transzformál!

A hallgató nézi az eredményt, de nagyon furcsának tartja. Próbaként kiszámítja, mit kapott volna, ha először az $+y$ irányba boostol V_1 sebességgel, majd utána az $+x$ irányba V_2-vel.

e.) Mit kapott eredményül? Miért tér el a d.) feladatban kapottól?

A hallgató ezután visszaemlékezik az előadásra, ahol szó volt arról, hogy a szokásos háromdimenziós forgatások is a Lorentz-transzformációk csoportjának részei. Ezért először egy egyszerű forgatást hajt végre, ezzel az űrhajó sebességvektorát a $+x$ irányba forgatja, most könnyen végre tudja hajtani a boostot a $+x$ irányba. Végül, mivel nem szeretné „elforgatni” a koordinátatengelyeket, ezért az első forgatás inverzét is végrehajtja.

Mit kapott ebben az esetben?

MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	C) HF 2

C02.) feladat

A négyes-gyorsulás vektort a négyes sebességvektor sajátidő szerinti deriváltjaként definiáljuk, $\alpha^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau}$. Ez definíciójából adódóan négyesvektorként transzformálódik.

Tekintsen egy űrhajót, melynek ismerjük a szokásos $\vec{v}$ (hármas) sebességvektorát, és $\vec{a}$ (hármas) gyorsulásvektorát.

a.) A definíciót felhasználva fejezze ki az űrhajó négyes-gyorsulásvektorának komponenseit, a hármas sebesség és gyorsulásvektor ismeretében!

Most tekintse azt a speciális esetet, amikor az űrhajó R sugarú egyenletes körmozgást végez, v sebességgel. Koordinátarendszerünket úgy vesszük fel, hogy a körpálya az x-y síkban helyezkedik el, középpontja az origó, a vizsgált pillanatban az űrhajó az $x^{\mu} = (0,R,0,0)$ téridő-pontban található és a $+y$ irányban mozog.

b.) Adja meg az űrhajó hármas gyorsulását a vizsgált pillanatban!

c.) Adja meg az űrhajó négyes-gyorsulását a vizsgált pillanatban!

d.) Térjen át abba a vonatkoztatási rendszerbe, ahol az űrhajó a vizsgált pillanatban éppen áll. Adja meg az űrhajó négyes-gyorsulását ebben a vonatkoztatási rendszerben!

e.) A d.) feladat alapján adja meg az űrhajó hármas gyorsulását a vele (pillanatnyilag) együttmozgó rendszerben!

Az űrhajón utazik Herbert Zweistein fizikus, aki nagyon szkeptikus az Albert Eistein-féle speciális relativitás elmélettel kapcsolatban. Rádión felveszi a kapcsolatot körpálya centrumában üldögélő barátjával, és megkéri, hogy mérje meg a körpálya R sugarát, az eredményt pedig küldje el neki. Ezután Herbert könnyedén megméri az e.) feladatban kapott gyorsulást(hogyan?), az űrhajó ablakán kitekintve az „állócsillagok” mozgását figyelve zsebórájának segítségével az űrhajó keringésének periódusidejét is meg tudja mérni. Azt találja, hogy mérési eredményei a Newtoni mechanikával tökéletes összhangban vannak, nincs szükség semmiféle relativisztikus humbukra, eredményeit azonnal tölti is fel az viXra.org „tudományos” oldalra.

f.) Mekkorának méri Herbert a keringési időt?

g.) Mutassa meg, hogy a mért keringési idő és gyorsulás, valamint a rádión kapott sugár érték valóban nincs ellentmondásban a Newtoni mechanikából várt eredménnyel.

Gondolkodtató kérdés: Mit változtatna a kísérleten?