

A19.) feladat

Egy Θ tehetetlenségi nyomatékú tárcsa egy tengelyhez van rögzítve, ami körül könnyen elfordulhat. A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2\Theta}$$

- Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!
- A szokásos $S(\varphi, t) = S_0(\varphi, E) - Et$ szeparálást alkalmazva írja fel az S_0 -ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!
- Oldja meg az egyenletet, adja meg az $S_0(\varphi, E)$ függvényt!
- A $t = 0$ időpontban a tárcsa a $\varphi = 0$, $p_\varphi = L$ kezdeti feltételekkel indult. Ez alapján adja meg az E és a $\frac{\partial S}{\partial E} = \beta$ mozgásállandók értékét!
- A d.)-ben kapott egyenletekből fejezze ki a tárcsa mozgását leíró $\varphi(t)$ függvényt!

A20.) feladat

Egy töltött részecske az x - y síkban mozoghat, rá z irányú mágneses térerősség hat. A rendszer (egy lehetséges) Hamilton-függvénye:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} (p_y - eBx)^2$$

- Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!
- A szokásos $S(x, y, t) = S_0(x, y, E) - Et$ szeparálást alkalmazva írja fel az S_0 -ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!
- Szeparálja tovább a hatásfüggvényt, keresse $S_0(x, y, E) = S_x(x, E, \alpha) + S_y(y, E, \alpha)$ alakban! Helyettesítse ezt az alakot a b.)-ben kapott rövidített Hamilton-Jacobi egyenletbe!
- Láthatja, hogy y -től való függés csak a $\frac{\partial S_y}{\partial y}$ tagon keresztül történik, az egyenlet többi tagja független y -től. Ezért $\frac{\partial S_y}{\partial y} = \alpha$ konstansnak választható. Használja ezt a választást! Milyen egyenletet kap S_x -re?
- Oldja meg az egyenleteket, adja meg az $S_x(x, E, \alpha)$ és $S_y(y, E, \alpha)$ függvényeket, majd ezekből a teljes $S(x, y, E, \alpha, t)$ hatásfüggvényt!

B28.) feladat

Egy tömegpont az x tengely mentén mozoghat, rá időben lineárisan növekvő külső erő hat. A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} - Axt$$

- Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!
- Mivel a Hamilton-függvény explicit módon függ az időtől, a szokásos szeparálást közvetlenül nem tehetjük meg. Próbálkozzon az alábbi alakkal:

$$S(x, t) = F(t)x + G(t)!$$
 Írja fel a Hamilton-Jacobi egyenletet ezt az alakot feltételezve!
- Gyűjtse össze a tagokat úgy, hogy az egyenlet az $x(\text{valami}_1) + \text{valami}_2 = 0$ alakban álljon előtünk, ahol a két „valami” már nem függ az x -től.
- Ahhoz, hogy az egyenletet megoldjuk, a két „valami”-nek külön-külön zérusnak kell lennie. (Miért is?) Ebből a két feltételből adja meg az $F(t)$ és $G(t)$ függvényeket! Ha jól számolt, megjelenik egy szabad integrálási konstans, ezt jelölje α !
- Írja fel az $S(x, \alpha, t)$ függvényt! A $t=0$ időpontban a tömegpont az $x_0=0$ és $p_0=0$ helyzetből indult. Ennek segítségével rögzítse az α konstans értékét!
- A Hamilton-Jacobi egyenlet szerint a $\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$ mozgásállandó. Fejezze ki ennek értékét a kezdeti feltételek segítségével!
- A $\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$ összefüggésből fejezze ki a mozgásegyenlet $x(t)$ megoldását!

B29.) feladat

Gyakorlaton szerepelt a függőleges hajtás problémája, aminek Hamilton-függvénye:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + mgx$$

A szokásos Hamilton-Jacobi egyenletben „2”-es típusú $S(x, \alpha)$ alkotófüggvényt keresünk, ami zérussá teszi a Hamilton-függvényt, majd kihasználjuk, hogy az α új impulzus mozgásállandó. Ez azonban nem az egyetlen lehetséges választás.

Keressünk most „3”-as típusú $S(p, \alpha)$ alkotófüggvényt! Ekkor $x = -\frac{\partial S}{\partial p}$.

- Írja fel a Hamilton-Jacobi egyenletet: $H(p, -\frac{\partial S}{\partial p}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Szeparálja az időt az $S(p, t) = S_0(p, E) - Et$ alakban! Írja fel az S_0 -ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!
- Oldja meg az egyenletet, adja meg $S_0(p, E)$ függvényt!
- A $t=0$ időpontban a test az $x=0$ pontból indult p_0 impulzussal. Fejezze ki ennek segítségével az E konstans értékét!
- A $\beta = \frac{\partial S}{\partial E}$ mennyiség a Hamilton-Jacobi egyenlet értelmében időállandó. Fejezze ki ennek értékét a kezdeti feltételek segítségével!
- Adja meg a mozgásegyenlet $x(t)$ megoldását!

B30.) feladat

Tekintse a centrális erőterben mozgó részecske problémáját. A rendszer Hamilton-függvénye polár koordinátákban:

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r)$$

- Írja fel a rendszer teljes Hamilton-Jacobi egyenletét!
- Szeperálja az időt, azaz keresse a megoldást $S(r, \varphi, t) = S_0(r, \varphi, E) - Et$ alakban!
Írja fel az S_0 -ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!
- Szeperálja a szöget, azaz keresse az S_0 függvényt $S_0(r, \varphi, E) = S_r(r, L, E) + L\varphi$ alakban, ahol L egy újabb konstans. Írja fel az S_r -re vonatkozó ún. radiális Hamilton-Jacobi egyenletet!
- Adja meg az S_r -t kifejező integrált! ($S_r = \int dr \dots$)

A megjelenő integrált általános esetben nem tudjuk zárt alakban kifejezni. Sok kérdésre azonban úgy is válaszolhatunk, hogy nem végezzük el az integrált.

- A $t = 0$ időpontban a részecske az origótól $r = R$ távolságra volt a $\varphi = 0$ helyen, és épp a sugárra merőlegesen haladt, azaz $p_r = 0$ és $p_\varphi = L_0$ voltak a kezdeti impulzusok. Ezen kezdeti feltételek ismeretében fixáljuk az L és E konstansokat!
- Az E -hez és L -hez kanonikusan konjugált koordináták legyenek β_E és β_L . Bár az S hatásfüggvényt nem fejezte ki zárt alakban, de a két β konstant fel tudja írni úgy, hogy bennük legfeljebb egy r szerinti integrál van:

$$\beta_E = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int dr \dots$$

$$\beta_L = \frac{\partial S}{\partial L} = \varphi + \int dr \dots$$

Fejezze ki a két „...”-ot!

- EXTRA! Legyen $V(r) = -\frac{k}{r}$! Ekkor a β_L -t meghatározó integrált mégis el tudja végezni.

Végezze el! Mit kapott?

C10.) Feladat

Tekintszen egy kétdimenziós izotrop harmonikus oszcillátort! Az energia és időegységek megfelelő átskálázása után a rendszer Hamilton-függvénye az alábbi alakban áll előttünk:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2)$$

- a.) Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét, majd megfelelő szeparálások után oldja meg!
- b.) A megjelenő két konstanst hozza kapcsolatba a kezdeti feltételekkel!
- c.) Szoftver segítségével ábrázolja a hatásfüggvény szintvonalait különböző konstans paraméterek esetén. Egy ábrán a szintvonalakkal rajzoljon be a két konstansnak megfelelő megoldásokat! Játsszon a paraméterekkel!