

**A01.) feladat**

A Speciális Relativitáselmélet kidolgozásakor rengeteg paradoxon született. Ezek az elmélet (nem létező) belső ellentmondásaira kívántak rámutatni. Némelyikük máig is fennmaradt, mert elemzésük hozzájárul az elmélet jobb megértéséhez. Az egyik ilyen az ún. „ikerparadoxon”, amely mára már beépült az elméletbe.

Egy másik az ún. „**pajta-rúd**” paradoxon. Ennek lényege a következő.

Adott egy pajta, amelynek két ellentétes falán egy-egy ajtó van. Az ajtók távolsága  $L_0$ . Tekintsünk egy ugyancsak  $L_0$  hosszúságú rudat. Fussunk át a rúddal relativisztikus nagyságú  $V$  sebességgel a pajtán! Ekkor hozzánk képest a pajta  $V$  sebességgel mozog. Ezért azt észleljük, hogy a pajta hossza (azaz az ajtók távolsága) kisebb lesz, mint a nyugalmi hosszúság, azaz  $L_p < L_0$ . Mivel  $L_R = L_0$ , ezért  $L_p < L_R$ . Tehát a rúd valamelyik vége mindig kilóg valamelyik ajtón. Azaz a rúd „nem fér be a pajtába”. Tehát, nem tudunk egy olyan pillanatot találni, amikor gyorsan becsukhatnánk mind a két ajtót

A pajtban álló megfigyelő szerint azonban a  $V$  sebességgel mozgó rúd rövidül meg. Azaz  $L_R < L_0$ , Mivel a pajta hossza  $L_P = L_0$ , ezért mindig igaz, hogy  $L_R < L_P$ . Tehát lesz olyan időpillanat amikor a rúd teljes egészében bent van a pajtában. Ekkor mindkét ajtó egy pillanatra becsukható. Mindkét ajtó zárt vagy csukott állapota azonban objektív dolog. Tegyük fel ugyanis, hogy készítünk egy olyan robbantó elektronikát, amelyet a két ajtó sorba kapcsolt zárszerkezete működtet. A bomba tehát akkor robban, amikor mindkét ajtó zárva van. A fenti gondolatmenetekben az ellentmondás nyilvánvaló. A robbanás ténye ugyanis nem lehet relatív. Ezt mindkét megfigyelő egyformá érzékeli. Vagy robban a pajta velü(n)k együtt, vagy nem!

- a.) Mekkora a rúd hossza a pajtához rögzített koordináta-rendszerben? Mekkora a pajta hossza a rúddal rögzített koordináta-rendszerben?

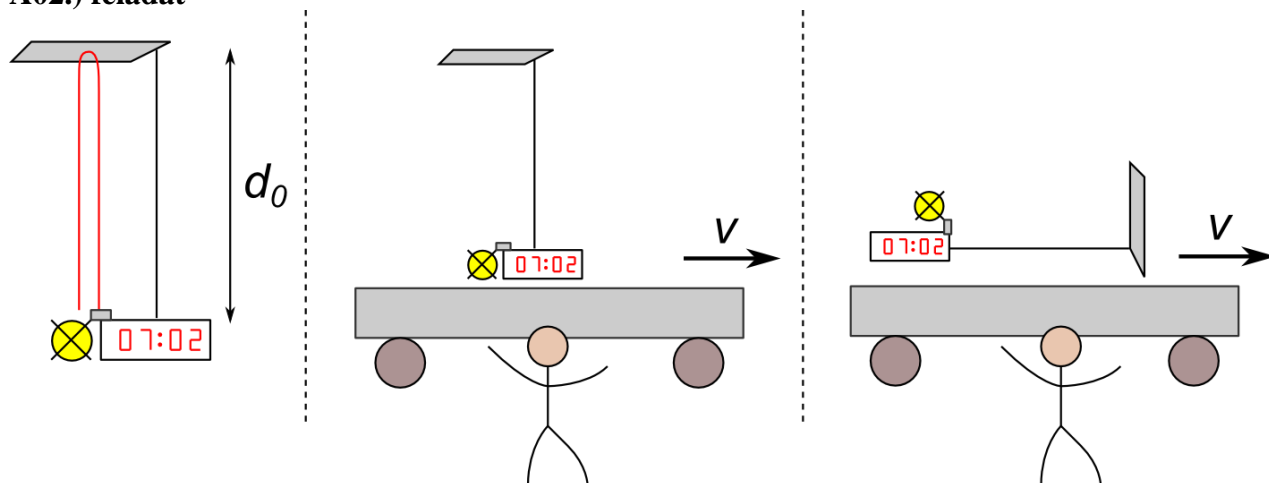
*A további ábrákon legyen a tér-idő-sík origója az a pillanat, amikor a rúd eleje beér a pajtába!*

- b.) Rajzolja fel a pajtához rögzített koordináta-rendszerben a rúd elejének és végének világvonalait, valamint a pajta bejáratának és kijáratának világvonalait. Jelölje be azokat az eseményeket amikor a rúd eleje kiér a pajtából, ill. amikor a rúd vége beér a pajtába! Melyik történt korábban?
- c.) A rúddal együttmozgó koordináta-rendszer tér és idő koordinátatengelyei az ábrán egyenes vonalak. Rajzolja be ezeket az ábrára!
- d.) A b.) feladatban is jelölt két esemény (rúd eleje kiér a pajtából, rúd vége beér a pajtába) világpontján keresztül húzzon párhuzamost az együttmozgó rendszer idő-tengelyével!
- e.) Ez alapján melyik esemény történt korábban, a rúd vonatkoztatási rendszerében?

*A „robbanást” esetleg kiváltó jelenségtől a feladat során tekintsen el. (Ez ugyanis már egy „rafináltabb” történet!)*

---

## A02.) feladat



Az idődilatáció és hosszkontrakció megértéséhez nagyon hasznos az alábbi (gondolat)kísérlet. Építettünk egy „fényórát”, ami a következő módon működik. Egy fényforrás felvillan egy nagyon rövid időre, a fénye egy tőle  $d_0$  távolságban lévő tükrön visszaverődik és a fényforrás közvetlen közelébe helyezett detektorba jut. Amikor a detektor jelez, lépteti eggyel a számlálót és újabb fényjelet küld ki. A bal szélső ábra mutatja az óra konstrukcióját.

Az óránk, mivel a fényterjedés sebességét használja ki az idő mérésére, biztosan Lorentz-kovariáns módon működik, azaz ha egy mozgó járműre helyezzük, akkor a relativitás elve miatt a járműhöz rögzített vonatkoztatási rendszer „idejét” méri.

- a.) Adjuk meg mekkora a nyugvó fényóra időegysége, azaz mennyi idő jut a fény a tükrön visszaverődve a detektorba?

Helyezzük az órát először a középső ábrán látható módon egy  $v$  sebességgel haladó vasúti kocsira. A sín mellett áll egy megfigyelő (pálcikaember), aki a haladó vagonot figyeli.

- b.) Rajzoljuk fel azon fénysugár pályáját a megfigyelő szemszögéből, ami a lámpából a tükrön visszaverődve a detektorba jutott.  
 c.) Mekkora utat tett meg a fény a megfigyelő szerint?  
 d.) Ez alapján mennyi idő telik el a megfigyelő szerint, amíg a vagonon lévő fényóra számlálója egy egységet ugrik?

Mivel a fényóránk Lorentz-kovariáns, így az ő általa mért időegység nem függhet attól, hogy a vagon haladási irányára merőlegesen, vagy esetleg máshogy helyeztük el. Tegyük fel, hogy az órát a jobboldali ábrának megfelelően helyeztük el a vagonon!

- e.) A megfigyelő szerint mekkora a lámpa és tükrő távolsága ebben az esetben?  
 f.) Mekkora utat tesz meg a fény a megfigyelő szerint, amíg a tükrön visszaverődve a detektorba jut?  
 g.) Ez alapján mennyi idő telik el a megfigyelő szerint, amíg a fényóra számlálója egy egységet ugrik?

**B01.) feladat**

A  $\pi$ -mezonok ( $\pi^+$  vagy  $\pi^-$ ) instabil részecskék, melyek (a velük együttmozgó rendszerben mérve)  $T_{1/2} = 1,8 \cdot 10^{-8}$  s felezési idővel elbomlanak. Létrehoztunk egy nyalábot  $\pi$ -mezonokból, amiben a részecskék  $0,8c$  sebességgel haladnak.

- Mekkorának mérjük ekkor a  $\pi$ -mezonok felezési idejét?
- Tegyük fel, hogy a  $\pi$ -mezonokat egy  $d = 36$  m hosszúságú alagúton vezetjük át. Hány százalékuk bomlik el az alagúton való áthaladás alatt?
- Mit kaptunk volna eredményül a b.) feladatra, ha nemrelativisztikus közelítéssel számolunk?
- Üljünk be a  $\pi$ -mezonokkal együttmozgó rendszerbe. Milyen hosszú itt az alagút?
- Mennyi idő alatt jutnak át az alagúton a  $\pi$ -mezonok a velük együttmozgó rendszerben?
- Hány százalékuk bomlik el az alagúton való áthaladás alatt a velük együttmozgó rendszerben?

**B02.) feladat**

A magas szőke földönkívüliek űrhajója meghibásodott, ezért egyenes vonalú egyenletes mozgást végez az űrben. Ősi ellenségeik, a kis szürkék az űrállomásukon észreveszik a nagy lehetőséget, és célba veszik a szőkék űrhajóját. Az űrállomás megfigyelői úgy látják, hogy az űrhajó  $d$  távolságban fog elhaladni mellettük és  $c/2$  sebességgel halad. Okos fizikusaik kiszámították, mikor és milyen irányban kell kilőniük szintén  $c/2$  sebességű lövedéküket, hogy az űrhajó hozzájuk lehető legközelebb robbanjon fel. Számításaikban a robbanás időpontját jelölik meg  $t=0$ -ként, a robbanás helyét tekintik az origónak.

- Vegyén fel kényelmes koordinátarendszereket!
- Mikor kellett kilőniük a szürkéknek a lövedéket?
- Adjuk meg a lövedék  $\mathbf{r}(t)$  hely-idő függvényét a választott koordinátarendszerben!

A magas szőkék űrhajóján utazik a híres lakodalmos roksztár és amatőr UFO-kutató, P. Attila, aki kidolgozta a „mindenek relativitásának” elméletét. Bár számításokat nem végez, azzal nyugtatja magát, hogy minden relatív, ezért csak a szürkék vonatkoztatási rendszerében robban fel az űrhajó, az övékben nem.

- Adjuk meg a lövedék  $\mathbf{r}'(t')$  hely-idő függvényét az űrhajóhoz rögzített koordinátarendszerben!
- Adjuk meg az űrhajó rendszerében a lövedék kilövésének pontos helyét és idejét!
- Kell-e aggódniuk a szőkéknek, vagy P. Attila nyugodtan rázendíthet a „gabonakör közepén állók” című méltán híres dalára?

**B03.) feladat**

Legyen  $A_1$  az a (standard) Lorentz-transzformáció ami átvisz a  $+x$  irányban  $0,6c$ -vel mozgó rendszerbe,  $A_2$  pedig az a transzformáció ami átvisz a  $+y$  irányban  $0,6c$ -vel mozgó rendszerbe.

- Adjuk meg a  $A_1$  és  $A_2$  transzformációk mátrixait!
- Hajtsa végre egymás után a két transzformációt. Adjuk meg a  $A = A_1 A_2$  és  $A' = A_2 A_1$  transzformációk mátrixát. Mutassa meg, hogy nem ugyanazt kapta.
- Tekintszen egy részecskét, ami áll annak a rendszernek az origójában, ahová a  $A$  transzformáció hatására jutottunk. Adjuk meg ennek a részecskének a mozgását az eredeti koordinátarendszerben. Mekkora és milyen irányú a részecske sebessége?
- Végezze el a c.) feladat számításait egy olyan részecskére, ami a  $A'$  rendszer origójában áll. Mekkora és milyen irányú sebességet kap az eredeti („álló”) rendszerben?

---

**C01.) feladat**

Az idődilatació és hosszúságkontrakció megértésénél tévútra juthatunk, ha úgy gondolkodunk, hogy mi mint megfigyelők a hozzánk képest relativisztikusan gyorsan mozgó órákat látjuk lassulni ill. tárgyakat látunk megrövidülni. A szemünkben kialakult kép ugyanis fény segítségével jön létre, a fény pedig nem terjed végtelenül gyorsan, és ezt figyelembe kell vennünk.

Tekintsünk egy űrhajót ami relativisztikusan nagy  $V$  sebességgel távolodik tőlünk. Az űrhajóra kívülről felszereltünk egy jó nagy mutatós órát, amit egy teleszkópon keresztül nézünk.

- a.) Mennyi idő alatt látjuk a másodpercmutatót egy szekundumnyit elfordulni?
- b.) Mi a válasz, ha az űrhajó közeledik hozzánk?

Láthatjuk, hogy a relativisztikusan gyorsan mozgó óra akár még „gyorsabban” is járhat a teleszkópunk szerint.

Hasonló módon tekintsünk egy  $L_0$  nyugalmi hosszúságú rudat, ami  $V$  sebességgel mozog a hosszirányával párhuzamosan. A rúd kitérőpályán halad, tőlünk  $d$  távolságra fog elhaladni.

- c.) Adjuk meg, hogy „hol látjuk” a rúd elejét és végét különböző időpillanatokban.
- d.) Mekkoraának látjuk a rúd hosszát az idő függvényében?
- e.) Lehetséges, hogy  $L_0$ -nál is hosszabbnak látjuk a rudat?