

1.) Feladat

Két részecske tökéletesen rugalmas ütközését vizsgáljuk. A két részecske egy közös egyenes pálya mentén mozog, egyikük nyugalmi tömege $m_{0,1}$, (szokásos) sebessége v_1 , a másik részecske nyugalmi tömege $m_{0,2}$, sebessége v_2 . Pályájuk a jelöli ki a koordinátarendszerünk x -tengelyét.

- Írjuk fel a részecskék p_1^μ és p_2^μ négyes-impulzusait! Idézzük fel, hogyan értelmezzük ezek komponenseit?
 - Írjuk fel a négyesimpulzus megmaradást az ütközésre, szörnnyedjünk el!
- Nemrelativisztikus ütközések leírásakor nagyon hasznos volt áttérni a két részecske tömegközépponti rendszerébe, itt ugyanis könnyen fel tudtuk írni az ütközés utáni sebességeket. Nézzük meg, hogyan kell ezt csinálni relativisztikusan!
- Írjuk fel a részecskék p_1^μ és p_2^μ négyes-impulzusainak összegét!
 - Írjunk fel egy általános W sebességű x -irányú Lorentz-boostot, és segítségével számítsuk ki az összesimpulzust egy W sebességgel mozgó rendszerben!
 - Adjuk meg, mekkorának kell választani V -t, hogy az összesimpulzus térszerű komponensei (azaz a szokásos impulzusvektor) eltűnjenek. Ezt a sebességet definiálhatjuk a tömegközéppont V_{TK} sebességként.
 - Térjünk át a tömegközépponti rendszerbe, és adjuk meg itt a részecskék ütközés előtti és utáni négyesimpulzusait. Hogy megkíméljük magunkat a sok rettenetes gyöktől, használjunk rapiditásokat a sebességek helyett.
 - Térjünk vissza az eredeti rendszerbe, adjuk meg a részecskék ütközés utáni négyesimpulzusait!

2.) Feladat

Egy intergalaktikus (mindenféle gravitációs vonzócentrumtól távoli) űrállomásról egy rakétahajtás elvén működő űrhajó indul. Az űrhajó kezdeti nyugalmi tömege, üzemanyaggal együtt M_0 . A rakéta üzemanyaga a rakétához képest w_0 (szokásos) sebességgel távozik. (Az w_0 sebességről egyelőre ne tegyünk fel semmit! Lehet akár relativisztikusan nagy is.)

- Üljünk be a rakétával együttmozgó rendszerbe, és tekintsük azt a pillanatot, amikor a rakéta (nyugalmi) tömege M ! Egy rövid idő alatt az üzemanyag égéstermékéből dm „nyugalmi tömegnyi” távozott. Írjuk fel a négyesimpulzus megmaradást ebben a rendszerben, és ez alapján adjuk meg a rakéta nyugalmi tömegének megváltozását, ill. a folyamat után a rakéta dv sebességét!
- Korábban láttuk, hogy ilyen egydimenziós mozgások során kényelmes lehet a rapiditással számolni. Számítsuk ezért át a rakétával (pillanatnyilag) együttmozgó rendszerben mért dv sebességváltozást $d\theta$ rapiditásra!
- Az a.) és b.) feladat eredményei alapján határozzuk meg a rakéta nyugalmi tömegét, és rapiditását amikor már összesen m nyugalmi tömegű égéstermék távozott.
- Határozzuk meg a rakéta sebességét a folyamat végén.
- Láthatjuk, hogy a rakéta nyugalmi tömege nem m -mel változott. Hogyan értelmezhetjük ezt?

3.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecskét homogén E nagyságú statikus elektromos térbe helyeztünk. A részecske álló helyzetből indul. Írjuk le a részecske mozgását! A részecske induljon az origóból a $t=0$ időpillanatban, a térerősség mutasson az x -tengely irányába!

- Adjuk meg először a részecske mozgását nemrelativisztikus közelítésben!
- Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!
- Oldjuk meg a mozgásegyenletet a részecske impulzusára!
- A $p_x(t)$ függvényből fejezzük ki az $v_x(t)$ függvényt!
- Rajzoljuk fel az $v_x(t)$ függvényt, és vessük össze a nemrelativisztikus megoldással!
- A sebesség integrálásával adjuk meg az $x(t)$ hely-idő függvényt! Rajzoljuk fel ezt is!

4.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecske homogén B mágneses térben mozog a térerősségre merőleges síkban. A részecske (kezdeti) sebessége v_0 nagyságú. Írjuk le a részecske mozgását! A koordináta-rendszerünket úgy választottuk meg, hogy a B mágneses indukció mutasson a z irányba, a részecske sebessége pedig kezdetben x irányú.

- Oldjuk meg a feladatot nemrelativisztikus közelítésben!
 - Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!
 - Felhasználva, hogy a részecske négyesimpulzusának Minkowski-hossza nem változik, mutassuk meg, hogy a részecske (szokásos) sebességének nagysága időben állandó.
 - Ezt felhasználva írjuk fel a mozgásegyenletet $\frac{d\vec{v}}{dt}$ -re!
 - Vegyük észre, hogy az egyenlet semmivel sem bonyolultabb az a.)-feladatban lévőnél. Oldjuk meg!
 - A részecske egyenletes körmozgást végez. Adjuk meg a körpálya sugarát és a mozgás periódusidejét! Vessük össze ezeket a nemrelativisztikus eredménnyel!
-

5.) Feladat

Oldjuk meg az 3.) és 4.) feladatokat áttérve a mozgásegyenlet relativisztikusan kovariáns alakjára!

- Írjuk fel a mozgásegyenletet az alábbi alakban,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu{}_\nu u^\nu,$$

ahol $F^\mu{}_\nu$ az előadáson bevezetett, az elektromos és mágneses tereket tartalmazó elektromágneses térerősség tenzor. Írjuk fel az egyenleteket a homogén elektromos, ill. mágneses tér esetén!

- Ha jól számoltunk, nagyon egyszerű (lineáris) differenciálegyenletrendszerre kaptunk. Oldjuk meg! Mik a kezdeti feltételek?
 - Adjuk meg a kezdeti feltételeknek is megfelelő $u^\mu(\tau)$ megoldást!
 - Integráljuk a kapott megoldást, határozzuk meg $x^\mu(\tau)$ -t!
 - A részecske x^0 koordinátája éppen a (vonatkoztatási rendszernek megfelelő) időkoordináta c -szerese. Ezt kihasználva $x^0(\tau)$ -ből adjuk meg a $\tau(t)$ függvényt.
 - Felhasználva az e.) feladat eredményét, adjuk meg a részecske $x^\mu(t)$ mozgását!
-

6.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecske egymásra merőleges homogén B mágneses és E elektromos térben mozog. A részecske kezdetben állt. Írjuk le a részecske mozgását! A koordináta-rendszerünket úgy választottuk meg, hogy a B mágneses indukció mutasson a z irányba, az E elektromos tér pedig az y irányba!

- Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét az 5.) feladatban is látott kovariáns alakban!

Bár az a.)-ben kapott egyenlet már így megoldható lenne, de tanulságosabb más utat követni.

Gondolkodjunk a következőképp: keresztezett elektromos és mágneses térben elképzelhető olyan egyenesvonalú egyenletes mozgás, amikor a mágneses Lorentz-erő és az elektromos tér által kifejtett erő éppen kioltja egymást. Átboostolva az ezzel a sebességgel mozgó rendszerbe az elektromos térerősség biztosan el fog tűnni, hiszen csak így maradhat benne egy töltés nyugalomban.

- Mekkora ennek az egyenletes mozgásnak a sebessége? Mikor értelmes fizikailag amit kapunk?
 - Transzformáljuk át a térerősségtenzort ebbe az egyenletesen mozgó rendszerbe!
 - Oldjuk meg a mozgást a mozgó rendszerben!
 - Adjuk meg a részecske $x^\mu(t)$ mozgását az eredeti (álló) rendszerben! Vázzuk a részecske pályáját!
 - Mi van, ha a b.) feladatban „nem értelmes” sebességet kapunk? Ekkor hogy mozog a részecske?
-