
1.) Feladat

Legyen adott két négyesvektor a kontravariáns koordinátáival valamely inerciarendszerben, $a^\mu = (a^0\ a^1\ a^2\ a^3)$ és $b^\mu = (b^0\ b^1\ b^2\ b^3)$. A Minkowski téridő metrikus tenzora pedig

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

a.) Elevenítsük fel a (speciális relativitáselméletnek megfelelő) Einstein-féle összegzési konvenció szabályait! A metrikus tenzor segítségével fejezzük ki a^μ Minkowski-hossznégyzetét, ill. a^μ és b^μ Minkowski-skalárszorzatát!

b.) Elevenítsük fel, hogyan definiáljuk a négyesvektorok alsóindexes (kovariáns) koordinátáit. Adjuk meg az $a_\mu = (a_0\ a_1\ a_2\ a_3)$ és $b_\mu = (b_0\ b_1\ b_2\ b_3)$ alsóindexes koordinátákat, majd ezek segítségével ismét fejezzük ki az *„a”* vektor Minkowski-hossznégyzetét, és az *„a”* és *„b”* vektorok skalárszorzatát, úgy, hogy a formulában már ne jelenjen meg a metrikus tenzor!

c.) Mint láttuk, indexek „lehúzását” a $g_{\mu\nu}$ tenzorral tudjuk elvégezni. Az index „lehúzás” művelet inverze nyilván az index „felhúzás”. Adjuk meg az ezt végrehajtó $g^{\mu\nu}$ tenzort!

2.) Feladat

Tekintsük a következő transzformációt:

$$\Lambda^{\mu}_{\cdot\nu} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) Mutassuk meg, hogy ez egy Lorentz-transzformáció!

b.) Tekintsük az $a^\mu = (1,1,0,0)$ négyesvektort! Mekkora ennek Minkowski hossz-négyzete? Hajtsuk végre ezen a vektoron a fenti transzformációt! Mutassuk meg, hogy a Minkowski-hossz invariáns maradt!

c.) Tekintsük a $b^\mu = (6,1,3,1)$ négyesvektort. Mekkora ennek a Minkowski hossz-négyzete? Mutassuk meg, hogy ez is invariáns maradt a fenti transzformáció után!

d.) Fejezzük ki a b_μ vektor komponenseit! Fejezzük ki a transzformált b'_μ vektor komponenseit is!

e.) Adjuk meg a Λ mátrix azon alakját, ami az alsó indexes vektorokat Lorentz-transzformálja!

$$b'_\mu = \Lambda_{\mu}^{\cdot\nu} b_\nu$$

f.) Mutassa meg, hogy az $a^\mu b_\mu$ Minkowski skalárszorzat invariáns maradt!

g.) Behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy

$$\Lambda_{\rho}^{\cdot\mu} \Lambda^{\rho}_{\cdot\nu} = \delta^{\mu}_{\cdot\nu},$$

azaz az alsóindexes vektorok a transzformáció inverzé(nek transzponáltjával) transzformálódnak.

3.) Feladat

Tekintsünk egy $f(\{x^\mu\}) = f(x^0,x^1,x^2,x^3)$ skalár függvényt (skalármezőt)!

(Ezt azért nevezik skalármezőnek, mert Lorentz-transzformáció során az egyes téridő-pontokon a függvény értéke nem változik meg. Ettől eltérő lenne pl. egy négyesvektor-mező, ami négyesvektorként transzformálódik minden téridőponton.)

a.) Írjuk fel a skalármező $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ négyes-gradiensét! Írjuk fel ennek segítségével a skalármező megváltozását két infinitezimálisan közeli téridőpontban:

$df = f(x^\mu + dx^\mu) - f(x^\mu) = ?$

Ez alapján a felső-indexes (kontravariáns) koordináták szerint képzett gradiens alsó- vagy felsőindexes vektor?

b.) Láttuk az előző feladatban, hogy $\partial_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$. Ehhez hasonlóan bevezethető a $\partial^\mu f = \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ felsőindexes gradiens is. Mutassuk meg, hogy ez valóban felső-indexes négyesvektor!

c.) A két deriválás egymás utáni alkalmazása: $\partial^\mu \partial_\mu f = \Box f$. Ez nyilvánvalóan skalárként transzfomrálódik.

Mutassa meg, hogy a $\partial^\mu \partial_\mu f = 0$ éppen a relativisztikus (skalár-)hullámegyenlet!

d.) Egy síkhullámot az alábbi alakban írhatunk fel: $f = f_0 \sin(\frac{\omega}{c} ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$. Tudjuk, hogy az $x^\mu = (ct,\mathbf{x})$ négyesvektor, ez alapján lássuk be, hogy a körfrekvenciából és hullámszámból az alábbi négyesvektor képezhető:

$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right)$

4.) Feladat

Előadáson bevezetésre került az $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ négyessebesség vektor, mint a négyes helyvektor sajátidő szerinti deriváltja.

a.) Adja meg a négyessebesség és a szokásos (hármas-)sebességvektor közötti összefüggést.

Tegyük fel, hogy felnézve az égre azt látjuk, hogy két űrhajó éppen egymással szemben repül, mindkettejük sebessége $v = 3/5c$. A koordinátarendszerünket úgy vesszük fel, hogy az űrhajók az *x* tengely mentén mozognak.

b.) Adjuk meg az űrhajók négyessebességeit!

c.) Adjunk meg egy Lorentz-transzformációt, ami átvisz minket az egyik űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerbe!

d.) Fejezzük ki az egyes űrhajók négyessebességeit ebben a rendszerben!

e.) Mekkora az egyes űrhajók szokásos sebessége ebben a rendszerben?

Tegyük fel, hogy a Földről elindítunk két űrhajót, (a Földről nézve) egymásra merőleges irányban egyenként $v = 3/5c$ sebességgel. Az egyik űrhajó mozogjon az *x* irányban a másik az *y* irányban!

f.) Írjuk fel az űrhajók négyessebességeit!

g.) Térjünk át az x irányba mozgó űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerbe! Adjuk meg itt a másik űrhajó négyessebességét!

h.) Mekkora és milyen irányú a másik űrhajó szokásos sebessége ebben a rendszerben?

5.) Feladat

A galaktikus birodalom propagandarádiója a $\nu = 1$GHz frekvencián sugároz a halálcsillagról. Az Ezeréves Sólyom a halálcsillagtól távol $c/2$ sebességgel halad úgy, hogy a halálcsillaghoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a sebességvektora a halálcsillaghoz húzott vezérsugárral $\alpha=30°$ szöget zár be. A feladatunk, hogy megadjuk, milyen frekvenciára kell Chewbaccának hangolnia a Sólyom rádióját, hogy fogja a jelet.

a.) Vegyünk fel egy kényelmes koordinátarendszert: a Sólyom sebessége jelölje ki az x tengelyt, a halálcsillag legyen az x-y síkban! Adjuk meg a rádióhullám négyes-hullámszámát ebben a koordinátarendszerben!

b.) Adjunk meg egy megfelelő Lorentz-transzformációt, ami a halálcsillag vonatkoztatási rendszeréből átvisz a Sólyom vonatkoztatási rendszerébe.

c.) Ez alapján a négyes hullámszámot (k^μ) áttranszformálva válaszoljunk a kérdésre, azaz milyen frekvenciára kell a rádióvevőt állítani?

6.) Feladat

A kvantummechanika kísérleti előzményeinek egyik fontos állomása az ún. Compton effektus felfedezése volt. (Artur Holly Compton 1892 – 1962. Nobel díj: 1927) Ez jelentette kísérleti bizonyítékát annak, hogy az Einstein által kitalált fotonnak impulzusa is van.

Egy ω_0 frekvenciájú foton egy kezdetben nyugvó elektronnal ütközik. Az ütközés („szórás") során az elektron meglökődik, p impulzussal kezd el mozogni, a foton pedig egyrészt veszít az energiájából, másrészt eredeti mozgásirányához képest ϑ szöget bezáróan halad tovább. A kísérlet során ezt a szórt fotont detektáljuk.

a.) Válasszunk kényelmes koordinátarendszert! Rajzoljunk ábrát a folyamatról!

b.) Írjuk fel a rendszer (teljes) négyes-impulzusát a szóródás előtt és után!

c.) Írjuk fel a négyes-impulzus megmaradást, ez alapján adjuk meg a szóródó foton körfrekvenciáját az eltérülés irányának függvényében: $\omega(\vartheta) = ?$

7.) Feladat (Nem maradt rá idő)

Két részecske tökéletesen rugalmas ütközését vizsgáljuk. A két részecske egy közös egyenes pálya mentén mozog, egyikük nyugalmi tömege $m_{0,1}$, (szokásos) sebessége v_1, a másik részecske nyugalmi tömege $m_{0,2}$, sebessége v_2. Pályájuk a jelöli ki a koordinátarendszerünk x-tengelyét.

a.) Írjuk fel a részecskék p_1^μ és p_2^μ négyes-impulzusait! Idézzük fel, hogyan értelmezzük ezek komponenseit?

b.) Írjuk fel a négyesimpulzus megmaradást az ütközésre, szörnyedjünk el!

Nemrelativisztikus ütközések leírásakor nagyon hasznos volt áttérni a két részecske tömegközépponti rendszerébe, itt ugyanis könnyen fel tudtuk írni az ütközés utáni sebességeket. Nézzük meg, hogyan kell ezt csinálni relativisztikusan!

c.) Írjuk fel a részecskék p_1^μ és p_2^μ négyes-impulzusainak összegét!

d.) Írjunk fel egy általános W sebességű x-irányú Lorentz-boostot, és segítségével számítsuk ki az össz-négyesimpulzust egy W sebességgel mozgó rendszerben!

e.) Adjuk meg, mekkorának kell választani V-t, hogy az négyesimpulzus térszerű komponensei (azaz a szokásos impulzusvektor) eltűnjenek. Ezt a sebességet definiálhatjuk a tömegközéppont V_{TK} sebességeként.

f.) Térjünk át a tömegközépponti rendszerbe, és adjuk meg itt a részecskék ütközés előtti és utáni négyesimpulzusait. Hogy megkíméljük magunkat a sok rettenetes gyöktől, használjunk rapiditásokat a sebességek helyett.

g.) Térjünk vissza az eredeti rendszerbe, adjuk meg a részecskék ütközés utáni négyesimpulzusait!

8.) Feladat (Nem maradt rá idő)

Egy intergalaktikus (mindenféle gravitációs vonzócentrumtól távoli) űrállomásról egy rakétahajtás elvén működő űrhajó indul. Az űrhajó kezdeti nyugalmi tömege, üzemanyaggal együtt M_0. A rakéta üzemanyaga a rakétához képest w_0 (szokásos) sebességgel távozik. *(Az w_0 sebességről egyelőre ne tegyünk fel semmit! Lehet akár relativisztikusan nagy is.)*

a.) Üljünk be a rakétával együttmozgó rendszerbe, és tekintsük azt a pillanatot, amikor a rakéta (nyugalmi) tömege M! Egy rövid idő alatt az üzemanyag égéstermékéből dm „nyugalmi tömegnyi” távozott. Írjuk fel a négyesimpulzus megmaradást ebben a rendszerben, és ez alapján adjuk meg a rakéta nyugalmi tömegének megváltozását, ill. a folyamat után a rakéta dv sebességét!

b.) Korábban láttuk, hogy ilyen egydimenziós mozgások során kényelmes lehet a rapiditással számolni. Számítsuk ezért át a rakétával (pillanatnyilag) együttmozgó rendszerben mért dv sebességváltozást $d\theta$ rapiditásra!

c.) Az a.) és b.) feladat eredményei alapján határozzuk meg a rakéta nyugalmi tömegét, és rapiditását amikor már összesen m nyugalmi tömegű égéstermék távozott.

d.) Határozzuk meg a rakéta sebességét a folyamat végén.

e.) Láthatjuk, hogy a rakéta nyugalmi tömege nem m-mel változott. Hogyan értelmezhetjük ezt?