MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	GYAK 1.

1.) Feladat

Az egydimenziós relativisztikus mozgások szemléltetésére gyakran az ún. Minkowski-síkot használjuk, amit az (egydimenziós) tér és idő tengelyek feszítenek ki. Az időtengelyen érdemes a *ct* kombinációt mérni, így a koordinátatengelyek az *x* és *ct*.

a.) Rajzoljuk fel a Minkowski-sík koordinátatengelyeit. Az egyszerűség kedvéért ezek legyenek merőlegesek! Vegyük fel az egységeket (pl. fényév mértékegységben) a koordinátatengelyeken!

b.) A $t=0$ időpontban az $x=0$ pontból fényjeleket indítottunk a $+x$ és $-x$ irányokba. Rajzoljuk be a fényjelek világvonalait!

c.) Egy megfigyelő a $+x$ irányban halad V sebességgel. Adjuk meg azon Lorentz-transzformáció mátrixát, ami áttranszformál a mozgó megfigyelő vonatkoztatási rendszerébe!

d.) Rajzoljuk fel a mozgó megfigyelő x' és ct' koordinátatengelyeit az ábrára!

e.) Rajzoljuk be a mozgó megfigyelő koordinátatengelyeire az egységeket az a.) feladatnak megfelelő mértékegységben!

f.) Szemléltessük az idődilatációt az ábrán!

2.) Feladat

a.) Egy műhold a Földfelszín közelében mozog 8000 m/s sebességgel. A Földfelszínen eltelik egy óra. Mennyit késik ehhez képest a műhold órája?

b.) Egy űrhajó hozzánk képest a fénysebesség 99%-ával mozog. A mi óránk szerint eltelik egy óra. Mennyi idő telik el ez alatt az űrhajó órája szerint?

3.) Feladat

Tekintsük a híres ikerparadoxont. Az ikerpár egyik tagja (legyen a neve Béla) egy űrhajóval, melynek utazósebessége $3c/4$, elutazott az Alpha Centauri csillag naprendszerébe, hogy megvizsgálja az ott talált két exobolygót. Az űrhajó az utazósebességét az utazás idejéhez képest elhanyagolható idő alatt éri el, és elhanyagolható idő alatt le is fékez. Béla miután megérkezett, egy (földi) évig vizsgálatokat végez, és ezután tér haza. Tudjuk, hogy az Alpha Centauri távolsága a Naptól 4,3 fényév, és a Naphoz képest mért sebessége a fénysebességhez képest elhanyagolható.

a.) Rajzoljuk fel az ikertestvérek világvonalait a Minkowski síkon!

b.) Mennyit öregszik Géza, a Földön hagyott ikertestvér, amíg Béla visszatér az utazásból?

c.) Mennyit öregszik Béla?

Az ikerparadoxont próbálták úgy magyarázni, hogy annak oka a mozgó ikerpár gyorsulásában keresendő, hiszen a lényeges eltérés a két ikerpár között az, hogy egyiküknek mindenképp gyorsulnia kell, hogy hazatérhessen. Ezt a hibás magyarázatot a következő gondolatkísérlettel zárhatjuk ki:

Tegyük fel, hogy Bélával együtt Géza is elindult az utazásra, azonban félúton az űrhajó mentőkabinjával megállt egy, a Naphoz képest álló űrbeli fogadóban. Amikor testvére jött visszafelé, a kabint felgyorsítva csatlakozott hozzá, és így együtt tértek vissza a Földre. Láthatjuk, hogy ebben a gondolatkísérletben mindkét ikerpár pontosan azonos gyorsulásokat szenved el.

d.) Rajzoljuk fel Géza módosított világvonalát az ábrára!

e.) Mennyi időt töltött Géza a fogadóban?

f.) Mennyit öregedett Géza ebben az esetben a teljes utazás során?

4.) Feladat

A müonok a kozmikus sugárzás hatására keletkeznek a felső atmoszférában, és ezután jó közlítéssel egyenletes sebességgel haladnak a földfelszín irányába. Laboratóriumi körülmények között kimérték, hogy a müonok (amik nem stabil részecskékék) $T_{1/2} = 1{,}5$ μs felezési idővel elbomlanak.

a.) Ha a nemrelativisztikus mechanika törvényei lennének érvényesek, mekkora utat tenne meg egy (gyakorlatilag) fénysebességgel mozgó müon, amíg várhatóan elbomlik?

b.) Feltéve, hogy a müonok 10 km magasságban keletkeznek, hányadrészük érné el a Földfelszínt a „nemrelativisztikus" modell szerint?

Szeretnénk megmérni a müonok sebességét, ezért a következő kísérletet eszeltük ki. Készítünk két egyforma müondetektort, az egyiket egy meteorológia ballonnal $h = 3$ km magasságba emelünk, a másikat a felszínen hagyjuk. Ezután megmérjük az átlagos beütésszámot egy óra alatt. Azt találtuk, hogy a ballonon lévő detektor átlagosan n_b=700, a felszínen lévő n_f=500 beütést számol.

c.) Feltéve, hogy a müonok V_μ sebességgel mozognak, adjuk meg az n_f és n_b közötti összefüggést!

d.) A mérési adatok ismeretében adjuk meg a müonok V_μ sebességét!

5.) Feladat

a.) Egy méterrúd áll a mi vonatkoztatási rendszerünkben. Rajzoljuk fel a Minkowski síkra a rúd végpontjainak világvonalait!

b.) Mekkorának méri a rúd hosszát egy a rúd irányával párhuzamosan V sebességgel haladó megfigyelő?

c.) Szemléltessük a Lorentz kontrakciót a Minkowski síkon!

d.) Most tegyük fel, hogy hozzánk képest egy, a hosszirányában V sebességgel haladó rúd hosszát L-nek mértük. Rajzoljuk be a rúd végpontjainak világvonalait a Minkowski síkra!

e.) Mekkora a rúd nyugalmi hossza? Szemléltessük ezt a Minkowski síkon!

6.) Feladat

Einstein híres vonatának két végébe beleütött a ménkű. A sín melletti földeken dolgozó munkások szerint a két villámcsapás pontosan egyszerre történt. A vonat sebességét jelölje *V*!

a.) Rajzoljuk fel a vonat elejének és végpontjának világvonalait a Minkowski-síkra! Jelöljük be a két (egyidejű) villámcsapást!

b.) Rajzoljuk be a villámcsapások fényének világvonalait is az ábrára!

c.) A vonat középső kocsijában utazik egy megfigyelő. Rajzoljuk be az utazó megfigyelő tér is időtengelyeit az ábrára!

d.) Az utazó megfigyelő szerint melyik villámcsapás történt korábban?

e.) A vonat (nyugalmi) hossza L_0. Ennek ismeretében mennyi az időeltérés a két esemény között az utazó megfigyelő szerint?

7.) Feladat

Tekintsük a Lorentz transzformációknak azon egyparaméteres alcsoportját, melyet az *x*-irányú boostok alkotnak. Ekkor az *y* és *z* koordinátákkal nem is kell foglalkoznunk, ezek ugyanis nem transzformálódnak. A Lorentz transzformációk mátrixának ezért elegendő a felső 2×2-es blokkjára fókuszálnunk. Előadáson szerepelt, hogy ezek a transzformációk egy lehetséges paraméterezése:

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

a.) Adjuk meg a θ (ún. rapiditás) és v/c közötti összefüggést!

b.) Mutassuk meg, hogy két ilyen transzformációt egymás után végrehajtva teljesül az alábbi összefüggés:

$$\Lambda_2(\theta_1)\Lambda_2(\theta_2) = \Lambda_2(\theta_1+\theta_2)$$

c.) Ez alapján adjuk meg az egyirányú relativisztikus sebességösszeadás formuláját! Hogyan kell ezt értelmezni?

d.) Két relativisztikusan gyors autó a fénysebesség 80%-ával halad egymással szemben. Mekkorának mérik egymás sebességét a sofőrök?

8.) Feladat

A Földről a *t=0* időpontban két űrhajó indul egymásra merőleges irányban, *3/5 c* sebességgel.

a.) Vegyünk fel egy kényelmes koordinátarendszert. Adjuk meg az űrhajók $\mathbf{r}_1$(t) és $\mathbf{r}_2$(t) hely-idő függvényét!

b.) Üljünk át az „1”-es űrhajóhoz rögzített rendszerbe! Adjuk meg a „2”-es űrhajó $\mathbf{r}_2$’(t’) hely-idő függvényét ebben a rendszerben!

c.) Adjuk meg a „2”-es űrhajó sebességvektorát ebben az új rendszerben! Mekkora szöget zár-ez be az „1”-es űrhajót a Földdel összekötő egyenessel?

9.) Feladat

Előadáson a Lorentz-transzformációk úgy lettek bevezetve, hogy azoktól elvártuk, őrizzék meg a tér-idő koordinátákból képzett „négyes”-vektor Minkowski hossznégyzetét:

$$(ct)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2=(ct')^2-(x'^1)^2-(x'^2)^2-(x'^3)^2$$

A *ct* kombinációt x^0-lal szokás jelölni.

Definiáljuk két különböző téridőpont „négyes”-vektorának Minkowski skalárszorzatát az alábbi módon:

$$\langle x,y\rangle = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$$

Mutassuk meg, hogy abból, hogy minden „négyes”-vektor Minkowski hossza megőrződik a Lorentz transzformációk alatt az is következik, hogy két különböző „négyes”-vektor skalárszorzata is változatlan marad.

10.) Feladat

Egy relativisztikusan gyors űrhajóval hagyjuk el a Földet, és a sarkcsillag felé száguldunk. Még alig hagytuk el a Földet, amikor kinézünk az ablakon. Hogy néznek ki a szokásos csillagképek? Tegyük fel, hogy egy csillagot a sarkcsillaghoz képest ϕ szögben láttunk a Földről. Hol látjuk az űrhajóból kinézve?