MECHANICS 2 (2017/18 spring)	PROBLEM SET 9

Problem 1.)

Consider the Kepler problem that is described by the Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}.$$

a.) Consider the following vector (it is called the Runge-Lenz vector)
   $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\,\alpha\,\mathbf{e}_r$.
   Express the components of that vector so, that only the components of the canonical momentum and position vectors are used.

b.) Determine the Poisson bracket $[A_i, H]$. What does it tell about the vector A?

c.) Using the conservation of A, derive the particle's orbital.
   To do so consider an orbital that is in the x-y plane and the vector A points in the x direction. (We can always choose a coordinate system where this is true.) Express the scalar product $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ using polar coordinates (r,ϕ) and then using trivial algebra express the orbital.

d.) What does the direction of A mean? What is its length?

Problem 2.)

A particle of mass m can move in the x-y plane where a conservative V(x,y) potential is also present.

a.) Write down the Lagrangian of the system and determine the Hamiltonian as a function of p_x, p_y, x and y.

b.) Write down tha Lagrangian of the system using the r and φ polar coordinates- ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$)

c.) Determine the Hamiltonian of the system as a function of p_r, p_φ, r and φ. Show that this „new" Hamiltonian (denoted by K) is equal to the „old" Hamiltonian, one only needs to change the variables.

d.) Express the canonical momenta p_x és p_y as functions of p_r, p_φ, r és φ.

e.) Show that the Poisson brackets between the variables $\{x,y,p_x,p_y\}$ don't change if we calculate them using the polar version of the canonical coordinates.

f.) Show that in the case of a central potential ($V=V(r)$) p_φ is a conserved quantity.

Problem 3.)

A particle of mass m can move in the x-y plane where a conservative V(x,y) potential is also present.

a.) Write down the Lagrangian of the system and determine the Hamiltonian as a function of p_x, p_y, x and y.

b.) We would like to transform to the rotating frame. The transformation is described by
   $$x(t) = X(t)\cos(\omega t) - Y(t)\sin(\omega t)$$
   $$y(t) = X(t)\sin(\omega t) + Y(t)\cos(\omega t)$$
   Write down the Lagrangian in the X, Y variables.

c.) Determine the „new" Hamiltonian K as a function of X,Y,P_X és P_Y. What is the connection between the „new" and the „old" Hamiltonian?

d.) Show that the Poisson brackets between the variables $\{x,y,p_x,p_y\}$don't change if we calculate them using the new canonical coordinates $\{X, Y, P_X, P_Y\}$.

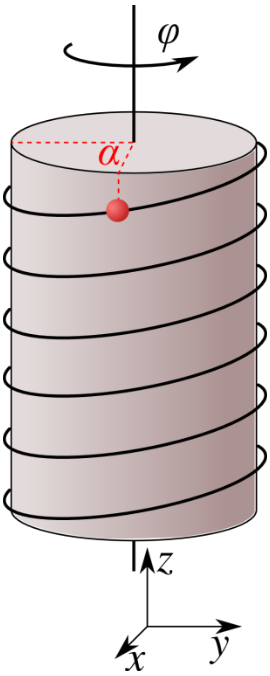
Problem 4.)

You studied some important algebraic properties of the Poisson bracktes,

- *[F,G] = - [G,F]*
- *[F,a G + b D] = a [F,G] + b [F,D]*, where *a* and *b* are real numbers.
- *[F, G D] = G [F,D] + [F,G] D*
- Jacobi identity *[A, [B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] =* 0

The proof of the first three relations is trivial, but the fourth is quite complicated. By making use of the simplectic matrix J prove the Jacobi identity. Use the antisymmetric property of J.

Problem 5.)



A wire track is fixed to a cilinder (see Figure). A small body of mass m can move without friction on the track The moment of inertia of the cilinder is Θ, and it can rotate around its axis. The position of the system is described by the rotation angle φ of the cilinder and the position α of the body. The gravitational force acts on the body.

The coordinates x,y,z of the small body is descrbied by

$$x = R\sin\alpha$$

$$y = -R\cos\alpha\,,$$

$$z = C(\alpha - \varphi)$$

where C is the vertical slope of the track.

a.) Construct the Lagrangian of the system.

b.) Determine the canonical momenta p_α and p_φ.

c.) The angular momentum of the system is $N = mR^2\frac{d\alpha}{dt} + \Theta\frac{d\varphi}{dt}$.

Express it as a function of p_α and p_φ .

d.) In the lecture you learned that conserved quantities generate symmetries. What symmetry is generated by N?

Problem 6.)

The Hamiltonian of a two-dimensional isotropic harmonic oscillator reads as

$$H = \frac{p_x^{\ 2}}{2m} + \frac{p_y^{\ 2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)\,.$$

a.) In pratice Pr8/2-es you have shown that the elements of the following 2x2 matrix are conserved quantities

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}(p_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j)$$

Repeat the calculations of the homework and show that these quantities are indeed conserved.

b.) What kind of symmetry is generated by the elements of the matrix A?

c.) Introduce the following quantites:

$$S_1 = \frac{A_{12}}{\omega},\quad S_2 = \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega},\quad S_3 = \frac{L}{2} = \frac{1}{2}(xp_y - yp_x)$$

Show that their Poisson brackets are $[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k$.

d.) Show that $H^2 = 4\,\omega^2\,(S_1^{\,2} + S_2^{\,2} + S_3^{\,2})$!

1.) Feladat

Tekintsük a Kepler-problémát, aminek Lagrange-függvénye

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}.$$

e.) Tekintse az alábbi vektort (a neve Runge-Lenz vektor):
$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\,\alpha\,\mathbf{e}_r$.
Fejezze ki ezen vektor komponenseit úgy, hogy benne csak a kanonikus hely és impulzus komponensek szerepeljenek!

f.) Számítsa ki az $[A_i, H]$ Poisson-zárójelet! Mit mondhatunk ez alapján az **A** vektorról?

g.) Az **A** vektor megmaradását kihasználva fejezzük ki (a mechanika 1 tárgyon látott effektív potenciálos módszernél sokkal egyszerűbben) a keringő bolygó pályáját!
Ehhez tekintsünk egy olyan ahol a pálya síkja az *x-y* sík, és az **A** vektor mutasson az x irányba. Fejezzük ki az **A** · **r** skaláris szorzatot az (r,ϕ) polárkoordináták segítségével, majd rendezzük megfelelően a kapott kifejezést és olvassuk le a pályát!

h.) Milyen irányba mutat az **A** vektor? Mit fejez ki a hossza?

2.) Feladat

Egy tömegpont az *x-y* síkon mozoghat a *V(x,y)* potenciális energiával jellemzett konzervatív erőtérben.

g.) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét majd ebből vezesse le a Hamilton függvényt, mint p_x, p_y, x és y függvényét!

h.) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét úgy, hogy a tömegpont helyzetét az r és φ síkbeli polárkoordinátákkal írjuk le. ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$)

i.) Vezesse le a rendszer Hamilton-függvényét mint p_r, p_φ, r és φ függvényét! Mutassa meg, hogy az új (K-val jelölt) Hamilton függvény egyenlő a régi H-val, csak benne változócserét kell végrehajtani.

j.) Fejezze ki az x és y Déscartes koordinátákhoz rendelt p_x és p_y kanonikus impulzusokat p_r, p_φ, r és φ segítségével!

k.) Mutassa meg, hogy az $\{x,y,p_x,p_y\}$ változók közötti kanonikus Poisson-zárójelek nem változnak, ha azokat a polár-koordinátarendszer kanonikus koordinátáival és impulzusaival számítjuk ki!

l.) Mutassa meg, hogy centrális potenciál ($V=V(r)$) esetén a p_φ időállandó!

3.) Feladat

Egy tömegpont az *x-y* síkon mozoghat a *V(x,y)* potenciális energiával jellemzett konzervatív erőtérben.

e.) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét majd ebből vezesse le a Hamilton függvényt, mint p_x, p_y, x és y függvényét!

f.) Át szeretnénk térni forgó koordinátarendszerbe, azaz a következő változókra:

$$x(t) = X(t)\cos(\omega t) - Y(t)\sin(\omega t)$$

$$y(t) = X(t)\sin(\omega t) + Y(t)\cos(\omega t)$$

Írja fel a Lagrange-függvényt az X és Y változókban!

g.) Határozzuk meg az új K Hamilton függvényt az X, Y, P_X és P_Y függvényében! Hogy viszonyul ez az álló koordinátarendszer-beli koordinátákkal kifejezett Hamilton-függvényhez?

h.) Mutassa meg, hogy az $\{x,y,p_x,p_y\}$változók közötti kanonikus Poisson-zárójelek nem változnak, ha az új $\{X, Y, P_X, P_Y\}$ kanonikus változók szerint fejezzük ki őket.

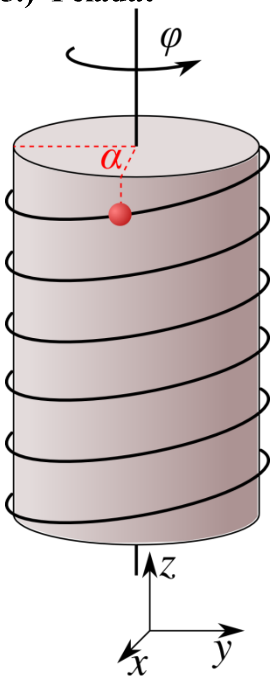
4.) Feladat

Az előadáson szerepelt a Poisson zárójelek néhány tulajdonsága:

- *[F,G] = - [G,F]*
- *[F,a G + b D] = a [F,G] + b [F,D]*, ahol *a*,*b* valós számok
- *[F, G D] = G [F,D] + [F,G] D*
- Jacobi azonosság: *[A, [B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]]* = 0

Ezek közül az első három bizonyítása triviális, a Jacobi azonosság azonban igen komplikált. Használjuk a szimplektikus mátrixos jelölést, és bizonyítsuk a Jacobi azonosságot! Használjuk ki a J szimplektikus mátrix antiszimmetrikus voltát!

5.) Feladat



Egy kör alapú hengerre egy spirál alakú drótpályát csévéltünk, amin egy m tömegű gyöngyszem súrlódás nélkül mozoghat. A henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére Θ, és a tengely körül könnyen (súrlódás nélkül) elfordulhat. A rendszer helyzetét a henger φ elfordulásával és a gyöngyszem α helyzetével írjuk le. A gyöngyszemre hat a külső gravitációs erőtér is.

A gyöngyszem x,y,z koordinátáit a két szöggel az alábbi módon tudjuk kifejezni:

$$x = R\sin\alpha$$

$$y = -R\cos\alpha\,,$$

$$z = C(\alpha-\varphi)$$

Ahol C jelöli a spirál menetemelkedését.

e.) Konstruálja meg a rendszer Lagrange-függvényét!

f.) Fejezze ki a p_α és p_φ kanonikus impulzusokat!

g.) A Gy7/1 házi feladatban Noether tétel segítségével megmutattuk, hogy a rendszer impulzusmomentuma mozgásállandó:

$$L = mR^2\dot{\alpha} + \Theta\dot{\varphi}$$

Fejezze ki az impulzusmomentumot a p_α és p_φ kanonikus impulzusok segítségével!

h.) Előadáson szerepelt, hogy a mozgásállandók szimmetriatranszformációkat generálnak. Milyen transzformációt generál L?

6.) Feladat

Egy izotrop harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

e.) A Gy7/2-es feladatban megmutattuk, hogy az alábbi 2x2-es szimmetrikus mátrix elemei megmaradó mennyiségek:

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}\left(p_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j\right)$$

Ismételjük meg a HF számításait, mutassuk meg, hogy valóban megmaradó mennyiségekről van szó!

f.) Milyen szimmetria transzformációkat generálnak az egyes mátrixelemek?

g.) Vezessük be az alábbi mennyiségeket:

$$S_1 = \frac{A_{12}}{\omega},\quad S_2 = \frac{A_{22}-A_{11}}{2\omega},\quad S_3 = \frac{L}{2} = \frac{1}{2}(xp_y - yp_x)$$

Mutassuk meg, hogy $[S_i,S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k$.

h.) Mutassuk meg, hogy $H^2 = 4\,\omega^2\,(S_1^2+S_2^2+S_3^2)$!