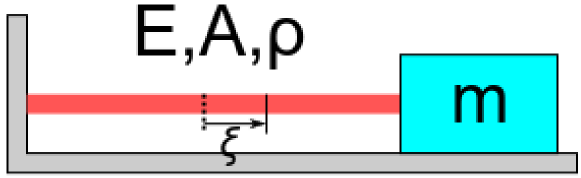


Problem 1.)

A body of mass m is fixed to the end of an elastic rod. The cross-section of the rod is A, its Young's modulus is E, its (usual 3-dimensional) mass-density is ρ, and the length of the rod is L.

The longitudinal displacement of the points of the rod is described by the field $\xi(z,t)$, the transversal displacement of the rod is negligible in our case. The position of the body is described by $u(t)$. The action of the system is

$$S=\int dt \left\{ \int_0^L dz \left(\frac{\rho A}{2} \left(\partial_t \xi \right)^2 - \frac{EA}{2} \left(\partial_z \xi \right)^2 \right) + \frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right\} .$$

As we see, if one naiively derives the equations of motion of this action, one gets a trivially wrong result: the will not be fixed to the end of the rod. We have to include the constraint $\xi(L,t) = u(t)$ explicitely in the calculations.

a.) The constraint can be taken into account using a (time-dependent) Lagrange-multiplicator. Write down the action modified by the Lagrange multiplicator.

b.) Write down the variation of the action, if the variation of the field and the position of the body are $\delta\xi(z,t)$ and $\delta u(t)$, respectively.

c.) Following the usual way, using integrations by part transform the action in a form where only the δu and $\delta\xi$ are present, while their derivatives are not. In the case of $\delta\xi$, be careful at the boundary z = L.

d.) Using the principle of least action derive the equations of motion for the system.

e.) Search the solution in the following wave-form, $\xi(z,t) = B \sin(kz) \sin(\omega t)$.
Determine the connection between k and ω.

f.) Starting from the solution of e.) write down the equation of motion for the body. You should arrive to a transcendent equation for the possible k values. Don't solve the equation.

g.) Discuss the limit, when the mass of the body is negligible. What are the free oscillation frequencies of the system in that case?

h.) Discuss the limit, when the mass of the rod is negligible. What is the smallest free oscillation frequency in that case?

i.) Determine the energy density and energy current in the rod. Show that the energy current that „flows out" from the rod at the body is exactly the time derivative of the body's kinetic energy.

Problem 2.)

One of the most important non-quadratic field theories is the sine-Gordon model, that is described by the Lagrangian

$$L=\frac{1}{2}\left(\partial_t \varphi(x,t)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_x \varphi(x,t)\right)^2 + \cos\left(\varphi(x,t)\right) - 1 \quad .$$

a.) Derive the Euler-Lagrange equations of motion for the model.

b.) Determine the expression of the energy density in the model.

c.) Derive the expression of the energy current in the model.

d.) Search for $\varphi(x,t) = const.$ (constant in time and space) solutions that solve the equations of motion. What is the energy density in these solutions? Which configurations of these have finite total energies?

e.) We would like to find such solutions that transfer from one of these configurations to the other. Show that the following time-independent configuration solves the equations

$$\varphi_1(x,t)=4\arctan\left(e^x\right)$$
.

Note.: This solution is called a standing soliton.

<u>*Hint:*</u>
$$\sin(4\arctan y)=4\frac{y-y^3}{(1+y^2)^2}$$

f.) Write down the $\varphi_1(x\rightarrow\infty)$ and $\varphi_1(x\rightarrow-\infty)$ limits. Sketch the $\varphi_1(x)$ function.

g.) Determine the energy density, end its integral (the total energy) for the solution ϕ_1.

h.) Show that the following time-dependent solution solves the equations.
$$\varphi_2(x,t)=4\arctan\left(e^{\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}}\right)$$
.

Note.: This is called the moving soliton solution with velocity v.

i.) Determine the energy density, end its integral (the total energy) for the solution ϕ_2.

<u>*Hint:*</u>
$$\cos(4\arctan y)=1-8\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

j.) Determine the energy current for the solution ϕ_2. Sketch it as a function of *x*.

Problem 3.)

In a model of a uniaxial ferromagnetic spinchain the energy density is described by the following expression
$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\partial_x M\right)\cdot\left(\partial_x M\right)-\frac{\lambda}{2}M_z^2$$
,

where the first term describes that the neighboring spins want to be parralel to each other, while the second term shows, that the spins prefer the +/- z directions. The length of the spins is fixed, therefore we can fix the length of the **M** vectorfield to 1, $M\cdot M=1$. This constraint could be taken into account by using a Lagrange-multiplicator but here we follow a different way.

a.) Parametrize the vector field using spherical coordinates,
$$M=\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\phi\\ \sin\vartheta\sin\phi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$$
!

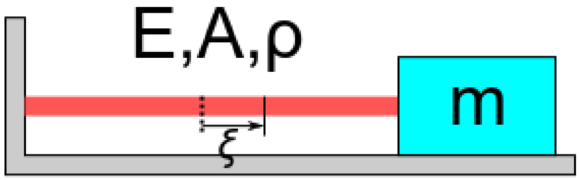
Write down the energy density as a function of ϑ and ϕ .

b.) By varying the total energy, determine the equations determining the equilibrium configurations.

c.) Search for constant solutions. How many do you find? What is their stability?

d.) Search for such (smallest energy) solution, that transfers from one constant solution to an other constant solution (domain wall).

e.) Keressen olyan (legkisebb energiájú) megoldást ami az egyik stabil konstans értékből átvisz a másik stabil konstans értékbe (doménfal).



1.) Feladat

Egy rugalmas rúd végére *m* tömegű testet kötöttünk. A rúd keresztmetszete *A*, Young-modulusa *E*, (térfogati) sűrűsége ρ, hossza *L*.

A rúd pontjainak hosszirányú elmozdulását a $\xi(z,t)$ mezővel írjuk le, a rúd transzverzális kitérése a vizsgált mozgások során zérus. A tégla helyét az $u(t)$ függvénnyel írjuk le, ezért a rendszer hatásfunkcionálja az alábbi alakot ölti:

$$S=\int dt\left\{\int_0^L dz\left(\frac{\rho A}{2}\left(\partial_t\xi\right)^2-\frac{EA}{2}\left(\partial_z\xi\right)^2\right)+\frac{1}{2}m\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\}$$

Ha ebből a kifejezésből naiv módon felírjuk a mozgásegyenleteket, nyilvánvalóan rossz eredményt kapunk, a tégla nem lesz a gumiszálhoz kötve. A $\xi(L,t)=u(t)$ kényszert ki kell rónunk.

a.) A kényszert egy Lagrange-multiplikátor segítségével vegye figyelembe! Írja fel a Lagrange multiplikátorral módosított hatásfunkcionált!

b.) Írja fel a hatás δS variációját, amennyiben, ha a közeg ill. tégla kitérésének variációja $\delta u(t)$ és $\delta\xi(z,t)$.

c.) A szokásos módon, parciális integrálással érje el, hogy a hatás-funkcionálban ne jelenjenek meg a δu és $\delta\xi$ variációk deriváltjai! A $\delta\xi$ esetén vigyázzon a $z=L$-nél megjelenő peremtaggal!

d.) A legkisebb hatás elvét alkalmazva adja meg a rendszer mozgásegyenleteit!

e.) Keresse a hullámegyenlet megoldását állóhullám alakban: $\xi(z,t)=B\sin(kz)\sin(\omega t)$.

Adja meg a *k* és ω közötti összefüggést!

f.) Az e.) feladatban kapott általános megoldást helyettesítse be a test mozgásegyenletébe! Ez alapján adja meg a lehetséges *k* hullámszámokat meghatározó (transzcendens) egyenletet! Az egyenletet megoldania nem kell!

g.) Tekintsük azt a határesetet, amikor a tégla tömege elhanyagolhatóan kicsi. Mekkorák ekkor a rendszer sajátfrekvenciái? Hogyan értelmezhető az eredmény?

h.) Tekintsük azt a határesetet, amikor a tégla tömege nagyon nagy. Mekkora ekkor a legkisebb sajátfrekvencia? Minek felel ez meg? Mekkora a többi sajátfrekvencia? Hogyan értelmezhetők ezek?

i.) Fejezzük ki az energiasűrűséget és energiaáramsűrűséget a rúdban. Mutassuk meg, hogy a rúdból „kifolyó” energiaáram éppen a test mozgási energiájává alakul!

2.) Feladat

Az egyik legfontosabb nem-kvadratikus térelmélet az ún. sine-Gordon-model, melynek Lagrange-sűrűsége a tér, idő és a mező megfelelő átskálázása után az alábbi alakot ölti:

$$L=\frac{1}{2}\left(\partial_t\varphi(x,t)\right)^2-\frac{1}{2}\left(\partial_x\varphi(x,t)\right)^2+\cos\left(\varphi(x,t)\right)-1\ .$$

a.) Adja meg a mező Euler-Lagrange mozgásegyenleteit!

b.) Írja fel az energiasűrűség általános kifejezését a modellben!

c.) Adja meg az energiaáram általános kifejezését a modellben!

d.) Keressen $\varphi(x,t)=const.$ időben és térben konstans konfigurációkat, amik megoldják a mozgásegyenleteket. Mekkora ezek energiasűrűsége? Melyek teljes energiája véges?

e.) Szeretnénk olyan megoldást kapni, amely az d.) feladat egyik konstans értékéből átvisz a másikba. Mutassa meg, hogy az alábbi időfüggetlen megoldás kielégíti a mozgásegyenletet:

$$\varphi_1(x,t)=4\arctan\left(e^{x}\right)$$
.

Megj.: Ezt álló szoliton megoldásnak nevezzük.

Segítség: $$\sin(4\arctan y)=4\frac{y-y^3}{(1+y^2)^2}$$

f.) Adja meg a $\varphi_1(x\to\infty)$ és $\varphi_1(x\to-\infty)$ határértékeket! Rajzolja fel a $\varphi_1(x)$ függvényt!

g.) Adja meg az energiasűrűséget és integrálját a ϕ_1 megoldás esetén x függvényében!

h.) Mutassa meg, hogy az alábbi időfüggő megoldás is megoldja az mozgásegyenleteket,

$$\varphi_2(x,t)=4\arctan\left(e^{\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}}\right)$$
.

Megj.: Ezt v sebességgel haladó szoliton megoldásnak nevezzük.

i.) Adja meg az energiasűrűséget és integrálját a ϕ_2 megoldás esetén x és t függvényében!

Segítség: $$\cos(4\arctan y)=1-8\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

j.) Adja meg az energiaáramot a ϕ_2 megoldás esetén x és t függvényében!

3.) Feladat

Egy egytengelyű ferromágneses spinlánc energiasűrűségét az alábbi kifejezéssel próbáljuk megadni:

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\partial_x M\right)\cdot\left(\partial_x M\right)-\frac{\lambda}{2}M_z^2$$
,

ahol az első tag azt írja le, hogy a kis elemi dipólusok a közeli szomszédjaikkal párhuzamosan szeretnének beállni, a második tag pedig azt, hogy a dipólusok preferálják a $\pm$ z irányú beállást. Az elemi dipólusok hossza adott, megfelelő skálázással elérhető, hogy $M\cdot M=1$ legyen. Ezt a kényszert figyelembe vehetnénk Lagrange-multiplikátorral, azonban most más utat járunk.

a.) Paraméterezze a mágnesezettséget gömbi polár koordinátákkal, azaz legyen

$$M=\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\phi\\ \sin\vartheta\sin\phi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$$
!

Írja fel az energiasűrűség kifejezését a ϑ és ϕ mezők segítségével!

b.) Az energiasűrűség integráljának variálásával vezesse le a lánc egyensúlyi konfigurációit meghatározó egyenletet!

c.) Keressen konstans megoldásokat! Hányat talál? Milyen ezek stabilitása?

d.) Keressen olyan (legkisebb energiájú) megoldást ami az egyik stabil konstans értékből átvisz a másik stabil konstans értékbe (doménfal).