MECHANICS 2 (2017/18 spring)	PROBLEM SET 5.

Problem 1.)
An elastic object has been deformed due to external forces. The displacement if the points of the object are described by the displacement field,

$x'_i = x_i + s_i(\mathbf{x})$.

a.) Consider two infinitesimally close points of the object. Express the distance of these points after the deformation.

b.) Consider a small volume around the point **x**. Determine the change of this volume.

Problem 2.)
Consider a square prism made of homogeneous, isotropic, and elastic material. The bottom of the prism has been softly fixed to a vertical wall, while the top of the prism is pulled by a horizontal force *F*. *(Remark: the soft fixing of the bottom means that the shearing at the wall is negligible.)*
The Lame parameters of the material are μ and λ, the mass density of the material is negligible.

a.) Write down the elements of strain tensor in the prism.

b.) Using Hooke's law, determine the deformation tensor in the prism.

c.) What is the relative length change of the prism?

d.) What is the relative change in the cross section of the prism?

e.) Using the results of c.) and d.), express the Young's modulus and the Poisson number for the material.

Problem 3.)
Concrete is one of the most popular construction materials. It can be casted easily, but after it solidifies it sustains large compressive stresses. However, tensile and shearing stresses can easily break the concrete, therefore we use ferro-concrete. We use ferro-concrete even in the building of pillars, where – as one naively thinks – only compressive stresses are present.
Consider a not too high concrete pillar of cross section $A = 0.01\ m^2$. We push the top of the pillar vertically with force F. The compressive strength of the pillar is very large, but the shearing strenght of concrete is finite: the shearing stress cannot be larger than $\sigma^{ny}{}_{max}$. (If the shearing stress is larger than the maximal value the concrete breaks.)

a.) Write down the elements of the stress tensor in the pillar. The vertical axis of the pillar is the *z* axis, the horizontal plane is the *x*-*y* plane.

b.) What is the shearing stress?

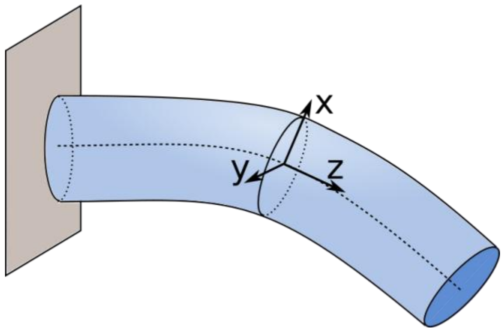
c.) Now rotate the coordinate system around the x axis by an angle of ϕ. What is the stress tensor in the rotated coordinate system?

d.) We see, that as a function of ϕ, there is some shearing stress in the concrete. What is the maximal shearing stress? (as a function of ϕ)

e.) How large can be F, if we don't want to break the pillar?

f.) If F is larger than the maximal value, qualitatively how will break the pillar?

Problem 4.)



A thin and long elastic rod is bent. In this problem our goal is to describe the stress and deformation tensors in the rod.

a.) Using the fact that at the surface of the rod there are no external forces present, and the rod is thin, ascertain us that in the rod only longitudinal („zz”) stress can be present.

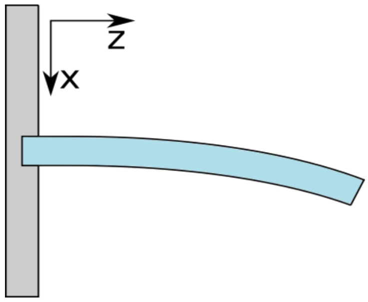
b.) In a short (lenght dl) piece of the rod, the radius of curvature of the bent rod is R, that is quite large (weakly bent rod). Determine the elements of the deformation tensor for that piece in the coordinate system where the axis of the rod is the z-direction, and the rod is (locally) bent in the x-z plane. (see figure!)

c.) Determine the so-called bending moment.

d.) Derive the expression for the rods total elastic energy.

e.) Sketch the deformation of the rods cross-section.

Problem 5.)



A thin and havy rod of length L is horizontally fasten in a wall (see figure). The other end of the rod is free. The axis of the (non bent) rod is the z axis while the vertical axis is the x axis. The Young’s modulus of the rods material is E, the cross-section parameter is Θ, and the rod’s linear mass density is ρ.

a.) Determine the bending moment in the rod as a function of z.

b.) Write down the differential equation that describes the shape of the bent rod.

c.) Determine the shape of the rod. What is the prolapse of the free end of the rod?

MECHANIKA 2 (2017/18 tavasz)	GYAK 5.

1.) Feladat

Egy rugalmas test a külső terhelések hatására eldeformálódott. Egyes pontjainak elmozdulását az elmozdulás-mező segítségével adhatjuk meg:

$$x'_i = x_i + s_i(\mathbf{x})$$

a.) Tekintsünk a test két infinitezimálisan közeli pontját és adjuk meg ezek távolságát a deformáció után!

b.) Tekintsük a test egy kicsiny térfogatát az **x** pont körül, adjuk meg ezen térfogat megváltozását!

2.) Feladat

Egy homogén, izotrop, *a* oldalú négyzet alapú hasábot egyik végét „lágyan" egy függőleges falhoz ragasztottuk, a másik végét vízszintesen húzzuk *F* erővel. (*Lágy ragasztás alatt azt értjük, hogy a ragasztási felületen a nyírófeszültség elhanyagolható.)* A hasáb anyagának Lamé-állandói μ és λ, sűrűsége elhanyagolhatóan kicsiny.

a.) Adjuk meg a hasábban ébredő feszültségtenzor elemeit!

b.) A Hooke-törvény segítségével fejezzük ki a hasáb deformációtenzorát!

c.) Adjuk meg a hasáb relatív megnyúlását!

d.) Adjuk meg a hasáb oldalhosszának változását!

e.) Ezek alapján fejezzük ki a hasáb Young-modulusát és a Poisson-számot a Lamé-állandók segítségével!

3.) Feladat

A beton az egyik legelterjedtebb építőanyag, hiszen önthető, de miután megszilárdul igen nagy nyomófeszültségeket is kibír. A húzó- és nyírófeszültségek azonban könnyen eltörhetik a betont, ezért szoktak vasalt betonból építkezni. Még pillérek építéséhez is vasbetont használunk, pedig ekkor azt gondolhatnánk, hogy a nyomóterhelés miatt felesleges a vasalás.

Tekintsünk egy $A = 1\ \mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű nem túl magas betonoszlopot, aminek a tetejét függőlegesen lefelé nyomjuk F erővel. A beton nyomószilárdsága igen nagy, számunkra most végtelennek vehető, a nyírószilárdsága azonban σ^{ny}_{max}. (Amennyiben ennél nagyobb nyírófeszültség ébred, a beton elreped.)

a.) Adjuk meg a feszültségtenzor elemeit az oszlopban! Az oszlop függőleges tengelye legyen a z tengely erre merőleges az x és y tengely!

b.) Mekkorának látszik a maximális nyírófeszültség?

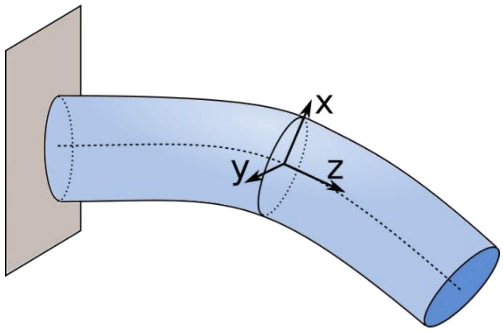
c.) Forgassuk el a koordinátarendszerünket az x tengely körül ϕ szöggel! Adjuk meg a feszültségtenzort ebben a koordinátarendszerben is!

d.) Azt látjuk, hogy ϕ függvényében mégiscsak megjelenik nyírófeszültség. Mekkora a maximális nyírófeszültség az oszlopban?

e.) Mekkora F terhelőerő esetén törik el az oszlop?

f.) Hogyan fog eltörni a betonoszlop?

4.) Feladat



Egy kesekeny de hosszú rugalmas rudat meghajlítottunk. A célunk ebben a feladatban a rúdban kialakult feszültségek és deformációk jellemzése.

a.) Kihasználva, hogy a rúd felületén nem lépnek fel külső erők, mutassuk meg, hogy a (kellően keskeny) rúdban csak a hosszirányú feszültségek lehetnek jelentősek.

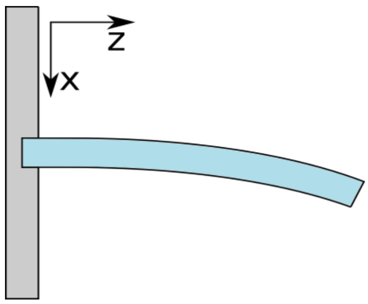
b.) A rúd egy rövid (*dl* hosszú) darabjának görbületi sugara R, ami igen nagy (gyenge hajlítás.) Adjuk meg ezen darabkában a deformációtenzor elemeit abban a koordinátarendszerben, ahol a rúd „érintője" z irányú, és (lokálisan) a z-x síkban van meghajlítva a rúd!

c.) Adjuk meg a darabka határán fellépő ún. hajlítónyomatékot!

d.) Adjuk meg a darabkában tárolt rugalmas energiát!

e.) Vázoljuk a rúd keresztmetszetének torzulását!

5.) Feladat



Egy keskeny, de nehéz L hosszúságú rudat az egyik végén vízszintesen befalaztunk. A másik vége szabadon lóg. Legyen a rúd (terheletlen) tengelye a z tengely, a függőleges irány az x tengely. A rúd Young modulusa E, keresztmetszeti tényezője Θ, lineáris sűrűsége ρ.

a.) Adjuk meg a rúdban ébredő hajlító nyomatékot a z függvényében!

b.) Írjuk fel a rúd alakját meghatározó differenciálegyenletet!

c.) Adjuk meg a rúd alakját! Mennyit hajlik le a szabad vége?
