MECHANICS 2 (2017/18 tavasz)	PROBLEM SET 4.

Problem 1.)
A spacraft, accelerated by a usual rocket, departs from an intergalactic space station. *(The spacecraft is far from any source of gravitational force.)* In the beginning, the total resting mass of the spacecraft and its fuel is M_0. The burned fuel goes out from the rocket with velocity w_0 (relative to the rocket), that can be also relativistivly large.

a.) First focus on the moment, when the spacecrafts total resting mass is M. Investigate the rocket from the inertial system, where its velocity is zero in that moment. In a very short time a small amount of the burned fuel goes out of the rocket. The resting mass of the exhausted fuel is dm. Write down the conservation of 4-momentum. Express the change dM of the spacecraft's resting mass and the velocity dv of the spacecraft after the process.

b.) On the last class we saw that in 1-dimensional motions (like the spacecrafts motion in our case) it's worth to use rapidities instead of velocities. Transform the dv velocity of the rocket into rapidity $d\theta$.

c.) Using the results of a.) and b.) determine the resting mass of the rocket, its rapidity, when the total resting mass of the exhausted fuel is m.

d.) What is then the velocity of the spacecraft?

e.) We see, that the decrease of the resting mass of the rocket is not m. Why?

Problem 2.)
A particle of resting mass m_0, and electric charge q is in a static homogeneous electric field E. The particle starts from rest. Solve the equations of motion for the particle. The particle is initially ($t=0$) in the origin, and the electric field points in the x direction.

a.) First solve the equations in the nonrelativistic approximation.

b.) Write down the relativistic equations of motion.

c.) Solve the equation for the particles momentum

d.) From the known momentum-time function $p_x(t)$, express the particles velocity $v_x(t)$.

e.) Draw the $v_x(t)$ function in a graph. Compare it with the nonrelativistic solution!

f.) Express the position $x(t)$ of the particle by integrating $v_x(t)$. Draw this function.

Problem 3.)
A particle of resting mass m_0, and electric charge q is in a static homogeneous magnetic field B. The particle moves in the plane x-y that is perpendicular to the field, that points in the z direction. The (inital) velocity of the particle is v_0 and points initially in the x direction.

a.) Solve the problem first in the nonrelativistic approximation.

b.) Write down the relativistic equations of motion.

c.) Exploiting the fact that the Minkowski-lenght of the particle's 4-momentum is constant, show that the length of the (usual) velocity vector remains also invariant.

d.) By using the result c.), express the equations of motion for $\frac{dv}{dt}$.

e.) Remark: the equations are no more complicated than the ones in a.). Let's solve them.

f.) The particles motion is a uniform circular motion. Express the radius of the orbital and the time period of the motion. Compare the results with the nonrelativistic ones.

Problem 4.)
Solve the problems 2.) and 3.) using the covariant form of the equations of motion.

a.) Express the equations in the following form,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu{}_\nu u^\nu,$$

where $F^\mu{}_\nu$ is the electromagnetic 4-tensor that contains the electric and magnetic fields together. What are the components of that tensor? Write down the equations of motion for the case of homogeneus electric and magnetic fields.

b.) We should get a simple set of linear differential equations. Solve them! What are the initial conditions?
c.) Express the solution $u^{\mu}(\tau)$ that is compatible with the initial conditions.
d.) Integrate $u^{\mu}(\tau)$ to determine $x^{\mu}(\tau)$.
e.) The x^0 coordinate of the particle is simply the time of the coordinate system (multiplied by c). From $x^0(\tau)$ derive the $\tau(t)$ function.
f.) Using the result of e.), express the usual $x^{\mu}(t)$ position-time functions of the particle.

Problem 5.)

A particle of resting mass m_0, and electric charge q is in a static homogeneous electric and magnetic fields E and B that are perpendicular to each other. The initial velocity of the particle is zero. Determine the motion of the particle. The magnetic inducion points in the z direction while the electric field points in the y direction.

a.) Write down the relativistic equations of motion for the particle in the covariant form (like in Problem 4.)).

We could solve simply the equations of a.) (as a practice you can do it.), but now it's worth to follow a different way. Our argument is the following: in a crossed electric and magnetic field one can figure out a uniform linear motion, where the magnetic Lorentz-force and the electric force cancel each other. If we boost to a frame that moves with the velocity of that motion, the electric field strength must be zero, because our particle is in rest in that frame. Here we can solve the much easier problem, where only a magnetic field is present, and finally we transform back to the original frame of reference, and get the solution of our problem.

b.) What is the velocity of the uniform linear motion? When is it physically meaningful?
c.) Transform the field-strength tensor to that frame!
d.) Solve the problem in the moving frame!
e.) Transform back to the original frame, and express $x^{\mu}(t)$. Sketch the trajectory of the particle.
f.) What happens if the velocity in b.) is not physically meaningful? How looks like the trajectory of the particle in that case?

MECHANIKA 2 (2017/18 tavasz)	GYAK 4.

1.) Feladat

Egy intergalaktikus (mindenféle gravitációs vonzócentrumtól távoli) űrállomásról egy rakétahajtás elvén működő űrhajó indul. Az űrhajó kezdeti nyugalmi tömege, üzemanyaggal együtt M_0. A rakéta üzemanyaga a rakétához képest w_0 (szokásos) sebességgel távozik. *(Az w_0 sebességről egyelőre ne tegyünk fel semmit! Lehet akár relativisztikusan nagy is.)*

f.) Üljünk be a rakétával együttmozgó rendszerbe, és tekintsük azt a pillanatot, amikor a rakéta (nyugalmi) tömege M! Egy rövid idő alatt az üzemanyag égéstermékéből dm „nyugalmi tömegnyi" távozott. Írjuk fel a négyesimpulzus megmaradást ebben a rendszerben, és ez alapján adjuk meg a rakéta nyugalmi tömegének megváltozását, ill. a folyamat után a rakéta dv sebességét!

g.) Korábban láttuk, hogy ilyen egydimenziós mozgások során kényelmes lehet a rapiditással számolni. Számítsuk ezért át a rakétával (pillanatnyilag) együttmozgó rendszerben mért dv sebességváltozást $d\theta$ rapiditásra!

h.) Az a.) és b.) feladat eredményei alapján határozzuk meg a rakéta nyugalmi tömegét, és rapiditását amikor már összesen m nyugalmi tömegű égéstermék távozott.

i.) Határozzuk meg a rakéta sebességét a folyamat végén.

j.) Láthatjuk, hogy a rakéta nyugalmi tömege nem m-mel változott. Hogyan értelmezhetjük ezt?

2.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecskét homogén E nagyságú statikus elektromos térbe helyeztünk. A részecske álló helyzetből indul. Írjuk le a részecske mozgását! A részecske induljon az origóból a $t=0$ időpillanatban, a térerősség mutasson az x-tengely irányába!

g.) Adjuk meg először a részecske mozgását nemrelativisztikus közelítésben!

h.) Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!

i.) Oldjuk meg a mozgásegyenletet a részecske impulzusára!

j.) A $p_x(t)$ függvényből fejezzük ki az $v_x(t)$ függvényt!

k.) Rajzoljuk fel az $v_x(t)$ függvényt, és vessük össze a nemrelativisztikus megoldással!

l.) A sebesség integrálásával adjuk meg az $x(t)$ hely-idő függvényt! Rajzoljuk fel ezt is!

3.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecske homogén B mágneses térben mozog a térerősségre merőleges síkban. A részecske (kezdeti) sebessége v_0 nagyságú. Írjuk le a részecske mozgását! A koordinátarendszerünket úgy választottuk meg, hogy a B mágneses indukció mutasson a z irányba, a részecske sebessége pedig kezdetben x irányú.

g.) Oldjuk meg a feladatot nemrelativisztikus közelítésben!

h.) Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!

i.) Felhasználva, hogy a részecske négyesimpulzusának Minkowski-hossza nem változik, mutassuk meg, hogy a részecske (szokásos) sebességének nagysága időben állandó.

j.) Ezt felhasználva írjuk fel a mozgásegyenletet $\frac{dv}{dt}$-re!

k.) Vegyük észre, hogy az egyenlet semmivel sem bonyolultabb az a.)-feladatban lévőnél. Oldjuk meg!

l.) A részecske egyenletes körmozgást végez. Adjuk meg a körpálya sugarát és a mozgás periódusidejét! Vessük össze ezeket a nemrelativisztikus eredménnyel!

4.) Feladat

Oldjuk meg az 3.) és 4.) feladatokat áttérve a mozgásegyenlet relativisztikusan kovariáns alakjára!

g.) Írjuk fel a mozgásegyenletet az alábbi alakban,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu{}_\nu u^\nu,$$

ahol $F^{\mu}{}_{\nu}$ az előadáson bevezetett, az elektromos és mágneses tereket tartalmazó elektromágneses térerősség tenzor. Írjuk fel az egyenleteket a homogén elektromos, ill. mágneses tér esetén!

h.) Ha jól számoltunk, nagyon egyszerű (lineáris) differenciálegyenletrendszert kaptunk. Oldjuk meg! Mik a kezdeti feltételek?

i.) Adjuk meg a kezdeti feltételeknek is megfelelő $u^{\mu}(\tau)$ megoldást!

j.) Integráljuk a kapott megoldást, határozzuk meg $x^{\mu}(\tau)$-t!

k.) A részecske x^0 koordinátája éppen a (vonatkoztatási rendszernek megfelelő) időkoordináta c-szerese. Ezt kihasználva $x^0(\tau)$-ből adjuk meg a $\tau(t)$ függvényt.

l.) Felhasználva az e.) feladat eredményét, adjuk meg a részecske $x^{\mu}(t)$ mozgását!

5.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecske egymásra merőleges homogén B mágneses és E elektromos térben mozog. A részecske kezdetben állt. Írjuk le a részecske mozgását! A koordinátarendszerünket úgy választottuk meg, hogy a B mágneses indukció mutasson a z irányba, az E elektromos tér pedig az y irányba!

a.) Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét az 5.) feladatban is látott kovariáns alakban!

Bár az a.)-ben kapott egyenlet már így megoldható lenne, de tanulságosabb más utat követni. Gondolkodjunk a következőképp: keresztezett elektromos és mágneses térben elképzelhető olyan egyenesvonalú egyenletes mozgás, amikor a mágneses Lorentz-erő és az elektromos tér által kifejtett erő éppen kioltja egymást. Átboostolva az ezzel a sebességgel mozgó rendszerbe az elektromos térerősség biztosan el fog tűnni, hiszen csak így maradhat benne egy töltés nyugalomban.

b.) Mekkora ennek az egyenletes mozgásnak a sebessége? Mikor értelmes fizikailag amit kapunk?

c.) Transzformáljuk át a térerősségtenzort ebbe az egyenletesen mozgó rendszerbe!

d.) Oldjuk meg a mozgást a mozgó rendszerben!

e.) Adjuk meg a részecske $x^{\mu}(t)$ mozgását az eredeti (álló) rendszerben! Vázoljuk a részecske pályáját!

f.) Mi van, ha a b.) feladatban „nem értelmes” sebességet kapunk? Ekkor hogy mozog a részecske?
