MECHANICS 2 (2017/18 spring)	PROBLEM SET 3.

Problem 1.)
Consider the one-parameter subgroup of Lorentz transformations that containes the boosts in the x direction. In that case one can simply forget the y and z coodinates because these are not transformed. Consequently it is sufficient to consider only the top left 2×2 block of the Lorentz matrix. In the lecture it was shown that in this special case, the Lorentz matrix can be parametrized as

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}.$$

a.) What is the connection between the parameter θ (the rapidity) and the velocity v of the boost?
b.) Show that the above transformation has the following property
$\Lambda_2(\theta_1)\Lambda_2(\theta_2) = \Lambda_2(\theta_1 + \theta_2)$
c.) By the use of this property, derive the „rule of addition” for relativistic velocities. What is the meaning of this formula?
d.) Two relativisticly fast cars are traveling by *0.8c* towards each other. According to one of the drivers, what is the velocity of the other car?

Problem 2.)

In the lecture the 4-velocity vector $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ has been introduced, and it has been shown that this is a proper 4-vector.

a.) Write down the connection between the 4-velocity and the usual (3-)velocity vector.

Let's suppose, that watching the sky, we see two spacecrafts that are flying towards each other, and both have velocity *0.6c*. We use a coordinate system, where the trajectories of the spacecrafts lie on the x-axis.

b.) Determine the 4-velocities of the spacecrafts.
c.) Write down a Lorentz-transformation that transforms into the frame of one of the spacecrafts.
d.) Express the 4-velocities of the spacecrafts in that frame of reference.
e.) What is the usual 3-velocity of the spacecrafts in that frame?

Let suppose now, that – as we see from the Earth – the two spacecrafts travel in perpendicular directions, x and y.

f.) Determine the modified 4-velocities of the spacecrafts
g.) Transform to the frame of the spacecraft travelling in the x direction. What is the 4-velocity of the other spacecraft in this frame?
h.) What is the usual 3-velocity of the other spacecraft in this frame?

Problem 3.)
The Compton effect (Artur Holly Compton 1892 – 1962. Nobel-prize: 1927) was one of the important experimental results that led to the birth of quantum mechanics. This experiment showed that a photon of energy $\hbar\omega$ has also a momentum $\frac{\hbar\omega}{c}$. Here ω is the frequency of the photon.
In the experiment a photon of frequency ω_0 collides with an initially resting electron (mass m). After the collision the electron has a momentum **p** while the photon loses from its energy, and its trajectory distorts by an angle of ϑ. After the collision we detect the scattered photon.

a.) Define a convenient coordinate system. Sketch a figure about the process.
b.) Write down the total 4-momentum of the system before and after the collision.

c.) Determine the frequency $\omega(\vartheta)$ of the scattered photon as a function of the distortion angle ϑ. Exploit the conservation of 4-momentum.

Problem 4.)

Let's consider the elastic collision of two particles. The particles move on a common, straight trajectory. One has resting mass $m_{0,1}$ and (usual) velocity v_1 while the other has resting mass $m_{0,2}$ and velocity v_2. Their common trajectory defines the x-axis.

a.) Write down the 4-momenta p_1^μ and p_2^μ of the two particles. What is the meaning of their components?

b.) Write down the equation for the 4-momentum conservation. It's scary, isn't it?

In non-relativistic collision problems it is a neat trick to transform of the frame of the „center of mass". In this frame, the 4-momentum conservation gives a much simpler equation, and one can immediately write down the momenta after the collision. Let's try to generalize this trick for the relativistic case.

c.) Write down the total 4-momentum of the system before the collision.

d.) Write down the matrix of a Lorentz boost with some arbitrary velocity V, and transform the 4-momentum with this transformation.

e.) What should be V, if we want the total (3-)momentum to vanish in the moving frame? Let's define this velocity as the velocity of the „center of mass", V_{CoM}.

f.) Transform to the frame of the center of mass. Express the 4-momenta of the particles in that frame before and after the collision.

g.) Transform back to the original frame, and express the 4-momenta of the particles after the collision.

1.) Feladat

Tekintsük a Lorentz transzformációknak azon egyparaméteres alcsoportját, melyet az *x*-irányú boostok alkotnak. Ekkor az *y* és *z* koordinátákkal nem is kell foglalkoznunk, ezek ugyanis nem transzformálódnak. A Lorentz transzformációk mátrixának ezért elegendő a felső 2×2-es blokkjára fókuszálnunk. Előadáson szerepelt, hogy ezek a transzformációk egy lehetséges paraméterezése:

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

e.) Adjuk meg a θ (ún. rapiditás) és v/c közötti összefüggést!

f.) Mutassuk meg, hogy két ilyen transzformációt egymás után végrehajtva teljesül az alábbi összefüggés:

$$\Lambda_2(\theta_1)\Lambda_2(\theta_2) = \Lambda_2(\theta_1 + \theta_2)$$

g.) Ez alapján adjuk meg az egyirányú relativisztikus sebességösszeadás formuláját! Hogyan kell ezt értelmezni?

h.) Két relativisztikusan gyors autó a fénysebesség 80%-ával halad egymással szemben. Mekkorának mérik egymás sebességét a sofőrök?

2.) Feladat

Előadáson bevezetésre került az $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ négyessebesség vektor, mint a négyes helyvektor sajátidő szerinti deriváltja.

i.) Adja meg a négyessebesség és a szokásos (hármas-)sebességvektor közötti összefüggést.

Tegyük fel, hogy felnézve az égre azt látjuk, hogy két űrhajó éppen egymással szemben repül, mindkettejük sebessége $v = 3/5c$. A koordinátarendszerünket úgy vesszük fel, hogy az űrhajók az *x* tengely mentén mozognak.

j.) Adjuk meg az űrhajók négyessebességeit!

k.) Adjunk meg egy Lorentz-transzformációt, ami átvisz minket az egyik űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerbe!

l.) Fejezzük ki az egyes űrhajók négyessebességeit ebben a rendszerben!

m.) Mekkora az egyes űrhajók szokásos sebessége ebben a rendszerben?

Tegyük fel, hogy a Földről elindítunk két űrhajót, (a Földről nézve) egymásra merőleges irányban egyenként $v = 3/5c$ sebességgel. Az egyik űrhajó mozogjon az *x* irányban a másik az *y* irányban!

n.) Írjuk fel az űrhajók négyessebességeit!

o.) Térjünk át az x irányba mozgó űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerbe! Adjuk meg itt a másik űrhajó négyessebességét!

p.) Mekkora és milyen irányú a másik űrhajó szokásos sebessége ebben a rendszerben?

3.) Feladat

A kvantummechanika kísérleti előzményeinek egyik fontos állomása az ún. Compton effektus felfedezése volt. (Artur Holly Compton 1892 – 1962. Nobel díj: 1927) Ez jelentette kísérleti bizonyítékát annak, hogy az Einstein által kitalált fotonnak impulzusa is van.

Egy ω_0 frekvenciájú foton egy kezdetben nyugvó elektronnal ütközik. Az ütközés („szórás”) során az elektron meglökődik, *p* impulzussal kezd el mozogni, a foton pedig egyrészt veszít az energiájából, másrészt eredeti mozgásirányához képest ϑ szöget bezáróan halad tovább. A kísérlet során ezt a szórt fotont detektáljuk.

d.) Válasszunk kényelmes koordinátarendszert! Rajzoljunk ábrát a folyamatról!

e.) Írjuk fel a rendszer (teljes) négyes-impulzusát a szóródás előtt és után!

f.) Írjuk fel a négyes-impulzus megmaradást, ez alapján adjuk meg a szóródó foton körfrekvenciáját az eltérülés irányának függvényében: $\omega(\vartheta) = ?$

4.) Feladat

Két részecske tökéletesen rugalmas ütközését vizsgáljuk. A két részecske egy közös egyenes pálya mentén mozog, egyikük nyugalmi tömege $m_{0,1}$, (szokásos) sebessége v_1, a másik részecske nyugalmi tömege $m_{0,2}$, sebessége v_2. Pályájuk a jelöli ki a koordinátarendszerünk x-tengelyét.

h.) Írjuk fel a részecskék p_1^μ és p_2^μ négyes-impulzusait! Idézzük fel, hogyan értelmezzük ezek komponenseit?

i.) Írjuk fel a négyesimpulzus megmaradást az ütközésre, szörnyedjünk el!

Nemrelativisztikus ütközések leírásakor nagyon hasznos volt áttérni a két részecske tömegközépponti rendszerébe, itt ugyanis könnyen fel tudtuk írni az ütközés utáni sebességeket. Nézzük meg, hogyan kell ezt csinálni relativisztikusan!

j.) Írjuk fel a részecskék p_1^μ és p_2^μ négyes-impulzusainak összegét!

k.) Írjunk fel egy általános W sebességű x-irányú Lorentz-boostot, és segítségével számítsuk ki az össz-négyesimpulzust egy W sebességgel mozgó rendszerben!

l.) Adjuk meg, mekkorának kell választani V-t, hogy az négyesimpulzus térszerű komponensei (azaz a szokásos impulzusvektor) eltűnjenek. Ezt a sebességet definiálhatjuk a tömegközéppont V_{TK} sebességeként.

m.) Térjünk át a tömegközépponti rendszerbe, és adjuk meg itt a részecskék ütközés előtti és utáni négyesimpulzusait. Hogy megkíméljük magunkat a sok rettenetes gyöktől, használjunk rapiditásokat a sebességek helyett.

n.) Térjünk vissza az eredeti rendszerbe, adjuk meg a részecskék ütközés utáni négyesimpulzusait!
