Problem 1.)

Consider the famous „twin-paradox". Let's call the twins Bobby and George. Bobby travels to one of the exo-planets of the Alpha Centauri system, that is 4.5 lightyears far from Earth, and it is almost in rest in the reference frame of the Earth. The maximal speed of the spacecraft is 0.75c, and the accelaration and braking times are negligeble.

After reaching his destination, Bobby studies the exo-planet for 1-year time and then he travels back to Earth.

a.) Draw the world lines of Bobby and George in the Minkowski plane.

b.) How many years ages George, who stayed on Earth, until Bobby gets back to the Earth?

c.) How many years ages Bobby at the same time?

A (wrong) explanation of the twin paradox states, that the different aging is caused by the acceleration of Bobby. Indeed, Bobby needs to have nonzero acceleration, if he wants to come home. However, using the following thought experiment we can exclude that explanation.

Let's suppose that Bobby and George both travel on the spacecraft, but at half distance George decides to stop – using the spacecrafts rescure cabin – and takes a long holiday at a space-motel that rests in the frame of Earth. When Bobby is traveling back, George accelerates his cabin to 0.75 c, joins Bobby in the spacecraft, and they arrive together back to Earth. We can see, that in this case George and Bobby can have exactly the same acceleration processes.

d.) Draw the modified world line of George in the figure!

e.) How much time does George spend in the motel?

f.) What is George's total aging during the travel?

Problem 2.)

In the upper athmosphere μ-mesons are produced by cosmic rays colliding with molecules, and then these unstable particles are moving with almost constant velocity towards the Earth's surface. The half time of decay for resting μ-mesons is $T_{1/2} = 1{,}5$ μs.

a.) Assuming the Newtonian mechanics to be correct, what distance would a μ-meson travel (with having velocity $v \approx c$) until it is expected to decay?

b.) Assuming that μ-mesons are produced in an altitude of 10 km, what fraction of them would reach the Earth's surface?

We know that Newtonian mechanics fail to describe the above questions. We want to measure the velocity of μ-mesons, therefore we perform the following experiment. We have created two identical μ-meson detectors. One is attached to a wheather balloon and is lifted up to h = 3 km altitude. The other one remains on the surface of Earth. We measure n_b = 700 counts at the balloon while only n_s = 500 counts on the surface in an hour.

c.) Assuming we know the V_μ velocity of the μ-mesons, what is the connection between n_b and n_s?

d.) According to the measured velues, determine the velocity of the μ-mesons.

Problem 3.)

At time $t=0$ two spacecrafts depart from Earth in perpendicular directions with velocities $3/5\ c$.

a.) Determine the position vectors $\mathbf{r}_1(t)$ and $\mathbf{r}_2(t)$ of the two spacecrafts as a function of time. (Use a convenient coordinate-system in the reference frame of Earth.)

b.) Let's sit in the reference frame of the spacraft „1". Determine the position vector $\mathbf{r}_2'(t')$ of the spacraft „2" in this reference frame.

c.) What is the velocity vector of the 2nd spacecraft in that reference frame? Determine also the direction of this velocity vector.

Problem 4.)

There are given two 4-vectors with their contravariant coordinates in some inertial system, $a^\mu = (a^0\ a^1\ a^2\ a^3)$ and $b^\mu = (b^0\ b^1\ b^2\ b^3)$. The metric tensor of the Minkowskian spacetime is simply

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

a.) Using Einstein's convention, and the metric tensor, express the Minkowski length square of a^μ, and the Minkowskian scalar product of a^μ és b^μ.

b.) How we define the covariant coordinates of these 4-vectors? Determine the $a_\mu = (a_0\ a_1\ a_2\ a_3)$ and $b_\mu = (b_0\ b_1\ b_2\ b_3)$ „lower index" coordinates. With the help of these covariant coordinates, express again the Minkowski length square of a^μ, and the Minkowskian scalar product of a^μ és b^μ.

c.) As we see, the indices can be lowered by multiplication with the $g_{\mu\nu}$ tensor. The inverse of this manipulation is the „raising" of indices. What tensor $g^{\mu\nu}$ can be used to raise the indices?

Problem 5.)

Consider the following transformation:

$$\Lambda^\mu_{.\nu} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) Consider the 4-vector $a^\mu = (1,1,0,0)$. What is its Minkowski length square? Apply the above transformation on this vector. Show that its Minkowski length square is invariant.

b.) Consider the 4-vector $b^\mu = (6,1,3,1)$, and show that its Minkowski lenght square is also invariant.

c.) Show in general, that the transformation $\Lambda^\mu_{.\nu}$ is a Lorentz transformation.

d.) Express the components b_μ. Express also the transformed b'_μ components.

e.) Determine the appropriate form of Λ, that transforms the lower-index vectors: $b'_\mu = \Lambda_\mu^{.\nu} b_\nu$.

f.) Show that $a^\mu b_\mu$ remains invariant.

g.) Show directly that $\Lambda_\rho^{.\mu} \Lambda^\rho_{.\nu} = \delta^\mu_{.\nu}$.

1.) Feladat

Tekintsük a híres ikerparadoxont. Az ikerpár egyik tagja (legyen a neve Bobby) egy űrhajóval, melynek utazósebessége *3c/4*, elutazott az Alpha Centauri csillag naprendszerébe, hogy megvizsgálja az ott talált két exobolygót. Az űrhajó az utazósebességét az utazás idejéhez képest elhanyagolható idő alatt éri el, és elhanyagolható idő alatt le is fékez. Bobby miután megérkezett, egy (földi) évig vizsgálatokat végez, és ezután tér haza. Tudjuk, hogy az Alpha Centauri távolsága a Naptól 4,3 fényév, és a Naphoz képest mért sebessége a fénysebességhez képest elhanyagolható.

a.) Rajzoljuk fel az ikertestvérek világvonalait a Minkowski síkon!

b.) Mennyit öregszik George, a Földön hagyott ikertestvér, amíg Bobby visszatér az utazásból?

c.) Mennyit öregszik Bobby?

Az ikerparadoxont próbálták úgy magyarázni, hogy annak oka a mozgó ikerpár gyorsulásában keresendő, hiszen a lényeges eltérés a két ikerpár között az, hogy egyiküknek mindenképp gyorsulnia kell, hogy hazatérhessen. Ezt a hibás magyarázatot a következő gondolatkísérlettel zárhatjuk ki:

Tegyük fel, hogy Bobbyval együtt George is elindult az utazásra, azonban félúton az űrhajó mentőkabinjával megállt egy, a Naphoz képest álló űrbeli fogadóban. Amikor testvére jött visszafelé, a kabint felgyorsítva csatlakozott hozzá, és így együtt tértek vissza a Földre. Láthatjuk, hogy ebben a gondolatkísérletben mindkét ikerpár pontosan azonos gyorsulásokat szenved el.

d.) Rajzoljuk fel George módosított világvonalát az ábrára!

e.) Mennyi időt töltött George a fogadóban?

f.) Mennyit öregedett George ebben az esetben a teljes utazás során?

2.) Feladat

A müonok a kozmikus sugárzás hatására keletkeznek a felső atmoszférában, és ezután jó közlítéssel egyenletes sebességgel haladnak a földfelszín irányába. Laboratóriumi körülmények között kimérték, hogy a müonok (amik nem stabil részecskékék) $T_{1/2} = 1{,}5$ μs felezési idővel elbomlanak.

a.) Ha a nemrelativisztikus mechanika törvényei lennének érvényesek, mekkora utat tenne meg egy (gyakorlatilag) fénysebességgel mozgó müon, amíg várhatóan elbomlik?

b.) Feltéve, hogy a müonok 10 km magasságban keletkeznek, hányadrészük érné el a Földfelszínt a „nemrelativisztikus” modell szerint?

Szeretnénk megmérni a müonok sebességét, ezért a következő kísérletet eszeltük ki. Készítünk két egyforma müondetektort, az egyiket egy meteorológia ballonnal $h = 3$ km magasságba emelünk, a másikat a felszínen hagyjuk. Ezután megmérjük az átlagos beütésszámot egy óra alatt. Azt találtuk, hogy a ballonon lévő detektor átlagosan n_b=700, a felszínen lévő n_f=500 beütést számol.

c.) Feltéve, hogy a müonok V_μ sebességgel mozognak, adjuk meg az n_f és n_b közötti összefüggést!

d.) A mérési adatok ismeretében adjuk meg a müonok V_μ sebességét!

3.) Feladat

A Földről a $t=0$ időpontban két űrhajó indul egymásra merőleges irányban, $3/5\ c$ sebességgel.

a.) Vegyünk fel egy kényelmes koordinátarendszert. Adjuk meg az űrhajók $\mathbf{r}_1(t)$ és $\mathbf{r}_2(t)$ hely-idő függvényét!

b.) Üljünk át az „1”-es űrhajóhoz rögzített rendszerbe! Adjuk meg a „2”-es űrhajó $\mathbf{r}_2'(t')$ hely-idő függvényét ebben a rendszerben!

c.) Adjuk meg a „2”-es űrhajó sebességvektorát ebben az új rendszerben! Mekkora szöget zár-ez be az „1”-es űrhajót a Földdel összekötő egyenessel?

4.) Feladat

Legyen adott két négyesvektor a kontravariáns koordinátáival valamely inerciarendszerben, $a^\mu = (a^0\ a^1\ a^2\ a^3)$ és $b^\mu = (b^0\ b^1\ b^2\ b^3)$. A Minkowski téridő metrikus tenzora pedig

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

a.) Elevenítsük fel a (speciális relativitáselméletnek megfelelő) Einstein-féle összegzési konvenció szabályait! A metrikus tenzor segítségével fejezzük ki a^μ Minkowski-hossznégyzetét, ill. a^μ és b^μ Minkowski-skalárszorzatát!

b.) Elevenítsük fel, hogyan definiáljuk a négyesvektorok alsóindexes (kovariáns) koordinátáit. Adjuk meg az $a_\mu = (a_0\ a_1\ a_2\ a_3)$ és $b_\mu = (b_0\ b_1\ b_2\ b_3)$ alsóindexes koordinátákat, majd ezek segítségével ismét fejezzük ki az „a” vektor Minkowski-hossznégyzetét, és az „a” és „b” vektorok skalárszorzatát, úgy, hogy a formulában már ne jelenjen meg a metrikus tenzor!

c.) Mint láttuk, indexek „lehúzását” a $g_{\mu\nu}$ tenzorral tudjuk elvégezni. Az index „lehúzás” művelet inverze nyilván az index „felhúzás”. Adjuk meg az ezt végrehajtó $g^{\mu\nu}$ tenzort!

5.) Feladat

Tekintsük a következő transzformációt:

$$\Lambda^{\mu}_{.\nu} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) Tekintsük az $a^\mu = (1,1,0,0)$ négyesvektort! Mekkora ennek Minkowski hossz-négyzete? Hajtsuk végre ezen a vektoron a fenti transzformációt! Mutassuk meg, hogy a Minkowski-hossz invariáns maradt!

b.) Tekintsük a $b^\mu = (6,1,3,1)$ négyesvektort. Mekkora ennek a Minkowski hossz-négyzete? Mutassuk meg, hogy ez is invariáns maradt a fenti transzformáció után!

c.) Mutassuk meg általánosan, hogy ez egy Lorentz-transzformáció!

d.) Fejezzük ki a b_μ vektor komponenseit! Fejezzük ki a transzformált b'_μ vektor komponenseit is!

e.) Adjuk meg a Λ mátrix azon alakját, ami az alsó indexes vektorokat Lorentz-transzformálja!

$$b'_\mu = \Lambda_{\mu}^{.\nu} b_\nu$$

f.) Mutassa meg, hogy az $a^\mu b_\mu$ Minkowski skalárszorzat invariáns maradt!

g.) Behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy

$$\Lambda_{\rho}^{.\mu} \Lambda^{\rho}_{.\nu} = \delta^{\mu}_{.\nu},$$

azaz az alsóindexes vektorok a transzformáció inverzé(nek transzponáltjával) transzformálódnak.