MECHANICS 2 (2017/18 spring)	PROBLEM SET 12.

Problem 1.)

Consider a two-dimensional anisotropic oscillator. The Hamiltonian of the system is

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega_y^2 y^2 .$$

a.) Write down the full (time dependent) Hamilton-Jacobi equation for the system.

b.) The Hamiltonian does not depend on time, therefore the Hamilton-Jacobi equation can be separated using the form $S(x,y,t) = S_0(x,y,E) - E\,t$. Write down the shortened Hamilton-Jacobi equation for S_0.

c.) Separate further the function S_0, i.e. search the solution in the form

$$S_0(x, y, E, \alpha) = S_x(x, E, \alpha) + S_y(y, E, \alpha) .$$

Write down the equations for S_x and S_y. Denote the new constant by α.

d.) Determine the functions S_x, S_y, and express the full solution $S(x,y,E,\alpha,t)$ of the Hamilton-Jacobi equation.

e.) The particle is initially ($t = 0$) at the position $x=x_0$ and $y=y_0$, and has zero momentum. Determine the values of E and α.

f.) How can one get the x(t), y(t) solutions of the equations of motion, using $S(x,y,E,\alpha,t)$? (Don't calculate it! It's a lengthy calculation.)

Problem 2.)

Two identical particle of mass m are connected by a spring whose spring-constant is D. The particles can move along the x axis. The Hamiltonian of the system is

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} D(x_1 - x_2)^2 .$$

a.) Write down the full (time dependent) Hamilton-Jacobi equation for the system.

b.) The Hamiltonian does not depend on time, therefore the Hamilton-Jacobi equation can be separated using the form $S(x_1, x_2, t) = S_0(x_1, x_2, E) - Et$. Write down the shortened Hamilton-Jacobi equation for S_0.

c.) The separation cannot be done using the coordinates x_1, x_2. Transform the equation to the new variables $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = x_1 - x_2$ and rewrite the equation of b.) using these variables.

g.) Separate the S_0 function as

$$S_0(X, y, E, \alpha) = S_X(X, E, \alpha) + S_y(y, E, \alpha) \, !$$

Write down the equations for S_X and S_y? Denote the new constant by α.

d.) Determine the functions S_X and S_y.

e.) Knowing the initial conditions ($x_{1,0}$, $x_{2,0}$, $p_{1,0}$ és $p_{2,0}$) determine the values of the α and E parameters.

Problem 3.)

Consider the following generalized oscillator, that is described by a power-law potential with exponent $\alpha>0$.

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + k\,|x|^\alpha$$

a.) Draw the contour lines H(p,x) = E on the p-x plane.

b.) Determine the integral that equals the phase-surface bounded by the contour-lines. Denote it by $2\pi I$.

c.) Usually the integral cannot be analytically determined. The best we can do is to determine the (power-law) dependence on the parameters E, m, and k. Performing appropriate variable transformations make the integral dimensionless, i.e. collect all the dependence on the parameters outside the integral. In this case the value of the dimensionless integral is only a number, that can be calculated numerically.

d.) By the derivation of I(E) determine the period of the oscillation as a function of the parameters.

Problem 4.)

Two identical bodies can move along the x axis in a box. The two bodies are attached to the walls through two springs with spring constant D, and there is also a spring between the two bodies. The Hamiltonian of the system is

$$D=\frac{1}{2m}p_1^{\ 2}+\frac{1}{2m}p_2^{\ 2}+\frac{1}{2}Dx_1^2+\frac{1}{2}Dx_2^2+\frac{1}{2}D(x_2-x_1)^2.$$

a.) Write down the shortened Hamilton-Jacobi equation for the system.

b.) The equation is not separable immediately, using the variables x_1 and x_2. Transform to the new variables $X=\frac{x_1+x_2}{2}$ and $Y=x_2-x_1$. Show that the equation is now separable. Perform the separation.

c.) By fixing the two constants (E and α) determine the canonical pairs of X and Y, i.e. the functions $P_X(X,E,\alpha)$ and $P_Y(Y,E,\alpha)$. Show that these are ellipses in the planes X-P_X and Y-P_Y.

d.) Determine the corresponding action variables (I_X and I_Y) as functions of E and α.

e.) Invert the relations of d.), i.e. express the values of E and α as functions of I_X and I_Y.

f.) Determine the oscillation frequencies in the system. Is the motion of the system periodic for any initial conditions?

5.) Feladat

The „adiabatic inveriance" of the action variable is an interesting theorem of Hamiltonian mechanics. The theorem, whose proof can be found in [1,2]), states that in a system with one degree of freedom the value of the action variables remains constant, even if we slowly change the parameters of the system, i.e. the Hamiltonian is (slightly) time-dependent.

The understanding of the theorem is easier, if we introduce a time-dependent parameter in the Hamiltonian, i.e.

$$H=H(p,q,\lambda(t)).$$

The action variable at a given value of λ can be determined uby calculating the phase-surface bounded by the equienergetic contour, $2\pi I(\lambda,E)=\oint p(E,q,\lambda)dq$. The theorem states, that if λ-t varies slowly and smoothly, then the value of I remains constant.

Consider a pendulum, where we slowly shrink the length of the pendulum. The Hamiltonian of the system for small amplitudes is

$$H(p,\varphi,l(t))=\frac{p^2}{2ml^2(t)}+\frac{1}{2}mgl(t)\varphi^2.$$

a.) For a given length l determine the action variable $I(l,E)$.

b.) We start from a small initial (angular) amplitude A, when the length of the pendulum is l_0. Then we slowly shrink the length of the pendulum to $l_0/2$. What is the final angular momentum of the pendulum?

[1] H. Goldstein, „*Classical Mechanics*"

[2] Clive G Wells and Stephen T C Siklos, Eur. J. Phys. **28**, 105 (ArXiV:physics/0610084)

MECHANIKA 2 (2017/18 tavasz)	GYAK 12.

1.) Feladat

Tekintse a kétdimenziós anizotróp harmonikus oszcillátor problémáját! A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^{\,2} + p_y^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_x^{\,2} x^2 + \frac{1}{2} m\omega_y^{\,2} y^2$$

a.) Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az S függvényt $S(x,y,t) = S_0(x,y,E) - E\,t$ alakban, ahol E egy állandó! Milyen egyenletet elégít ki az S_0 függvény?

c.) Szeparálja az S_0 függvényt, azaz keresse az alábbi alakban a megoldást: $S_0(x,y,E,\alpha) = S_x(x,E,\alpha) + S_y(y,E,\alpha)$!

Milyen egyenleteket elégít ki S_x és S_y? A megjelenő új állandót α-val jelöltük.

d.) Adja meg az S_x, S_y függvényeket, és ezzel a Hamilton-Jacobi egyenlet teljes $S(x,y,E,\alpha,t)$ megoldását!

e.) A $t = 0$ időpontban a tömegpont az $x=x_0$ és $y=y_0$ kezdőpontból indult zérus impulzussal. Adja meg az E és β paraméterek értékeit!

f.) Hogyan nyerhetjük $S(x,y,E,\alpha,t)$, és a kezdeti feltételek ismeretében az $x(t)$ $y(t)$ megoldásokat? (Nem kell végigszámolnia, nagyon hosszadalmas!)

2.) Feladat

Két azonos m tömegű tömegpontot egy D rugóállandójú rugó köt össze, a tömegpontok az x tengely mentén mozoghatnak, a rendszer Hamilton-függvénye az alábbi:

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} D(x_1 - x_2)^2$$

a.) Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az S függvényt $S(x_1, x_2, t) = S_0(x_1, x_2, E) - Et$ alakban, ahol E egy állandó! Milyen egyenletet elégít ki az S_0 függvény?

c.) Láthatóan a további x_1 ,x_2 szerinti szeparálást nem tudja közvetlenül elvégezni. Térjünk át az egyenletben az $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\quad y = x_1 - x_2$ változókra, azaz írja fel a b.) feladatban nyert S_0-ra vonatkozó egyenletet az X és y változók szerint!

d.) Szeparálja az S_0 függvényt az alábbi alakban: $S_0(X, y, E, \alpha) = S_X(X, E, \alpha) + S_y(y, E, \alpha)$!

Milyen egyenletet elégít ki S_X és S_y? A megjelenő új állandót jelölje α-val!

e.) Adja meg az S_X és S_y függvényeket!

f.) A kezdeti feltételek ($x_{1,0}$, $x_{2,0}$, $p_{1,0}$ és $p_{2,0}$) ismeretében adja meg az α és E paraméterek értékét!

3.) Feladat

Tekintsük az alábbi, $\alpha>0$ kitevőjű hatványfüggvény szerint változó potenciálban mozgó részecske esetét:

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + k\,|\,x\,|^{\alpha}$$

a.) Rajzoljuk fel a p-x síkra a H(p,x) = E szintvonalakat.

b.) Adjuk meg a szintvonalak által közrefogott „fázis-területet” meghatározó integrált! Ezt jelöljük $2\pi I$ -vel!

c.) Az integrált általában nem tudjuk egzaktul elvégezni, de érdekes kérdés lehet az E, m, és k paraméterektől való függés meghatározása. Megfelelő változócserével dimenziótlanítsuk az integrált, azaz érjük el, hogy a paraméterektől való függés kerüljön az integrál elé. Az integrál értéke ekkor csupán egy szám, numerikusan könnyen meghatározható.

d.) Az I(E) függvény deriválásával fejezzük ki a rezgés periódusidejét!

4.) Feladat

Két tömegpont az x tengely mentén mozoghat egy dobozban. A tömegpontokat külön-külön D rugóállandójú rugóval a falhoz kötöttük, és közéjük is egy D állandójú rugót tettünk. A rendszert leíró Hamilton-függvény:

$$D = \frac{1}{2m} p_1^{\,2} + \frac{1}{2m} p_2^{\,2} + \frac{1}{2} D x_1^2 + \frac{1}{2} D x_2^2 + \frac{1}{2} D (x_2 - x_1)^2$$

a.) Írjuk fel a rendszer időfüggetlen (rövidített) Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Láthatóan az egyenlet az x_1 és x_2 koordinátákban nem szeparálható. Térjünk át az $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$ és $Y = x_2 - x_1$ változókra. Mutassuk meg, hogy most már szeparálható a Hamilton-Jacobi egyenlet!

c.) A megjelenő két konstans (E és α) rögzítése mellett határozzuk meg az *X*-hez és *Y*-hoz kanonikusan konjugált impulzust, azaz a $P_X(X,E,\alpha)$ és $P_Y(Y,E,\alpha)$ függvényeket! Mutassuk meg, hogy ezek az X-P_X és Y-P_Y síkon ellipszisek!

d.) Határozzuk meg az I_X és I_Y hatásváltozók értékét E és α függvényében!

e.) Invertáljuk az összefüggést, fejezzük ki az E és α konstansokat I_X és I_Y függvényében!

f.) Határozzuk meg a rendszer rezgési frekvenciáit! Periodikus-e (tetszőleges kezdőfeltétel esetén) a rendszer mozgása?

5.) Feladat

A hamiltoni mechanika egy igen szép tétele a hatásváltozó „adiabatikus invarianciája". A tétel (amit itt nem bizonyítunk, a bizonyításért lásd [1,2]) kimondja, hogy amennyiben egy egy szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye függ az időtől, de az időfüggés lassú, úgy a rendszer úgy mozog, hogy a korábban bevezetett I hatásváltozó időben állandó.

A tétel értelmezését megkönnyíti, ha feltesszük, hogy a Hamilton-függvényben van valamilyen paraméter, ami lassan változik az idő függvényében, azaz:

$$H = H(p, q, \lambda(t))$$

A hatásváltozót tetszőleges λ paraméterérték mellett definiálhatjuk úgy, hogy rögzítjük λ-t, és ekkor kiszámítjuk egy periódusra a fázistrajektória által körülölelt $2\pi I(\lambda, E) = \oint p(E, q, \lambda) dq$ területet. A tétel azt állítja, hogy ha λ-t elegendően lassan (és simán) változtatjuk egy λ_1 értékről valamilyen λ_2 értékre, úgy I értéke nem változik.

Tekintsünk egy matematikai ingát, ahol az inga szálának hosszát az idő függvényében lassan rövidítjük. A rendszer Hamilton-függvénye kis kitérések esetén:

$$H(p, \varphi, l(t)) = \frac{p^2}{2ml^2(t)} + \frac{1}{2} mgl(t)\varphi^2$$

a.) Adott l ingahossz és E energia esetén írjuk fel az $I(l,E)$ hatásváltozót!

b.) Tegyük fel, hogy az inga kicsiny A (szög-)amplitudójú lenggést végzett, amikor az inga hossza l_0 volt. Ezután lassan rövidítve elérjük, hogy az inga hossza már csak $l_0/2$. Mekkora szögamplitudóval leng most az inga?

[1] H. Goldstein, „*Classical Mechanics*"

[2] Clive G Wells and Stephen T C Siklos, Eur. J. Phys. **28**, 105 (ArXiV:physics/0610084)