| MECHANIKA 2 (2017/18 tavasz) | GYAK 11. |
|---|---|

**1.) Feladat**

A two-dimensional, charged harmonic oscillator is put into homogeneous magnetic field. The field vector is perpendicular to the plane of the oscillator. The Hamiltonian of the system (using the so called symmetric gauge) reads as

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x+\frac{eB}{2}y\right)^2+\frac{1}{2m}\left(p_y-\frac{eB}{2}x\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

We solve the problem using a strange but elegant trick. The main idea relies on the observation, that the form of the magnetic Lorentz force and the Coriolis force in rotating frames is very similar. Therefore, if one transforms in an appropriate rotating frame, the effect of the magnetic field will be compensated by the Coriolis force. As a result, we get a simple harmonic oscillator, that we can solve easily.

a.) Consider the following generator function, and show that it transforms to the rotating frame.

$$W_2(x,y,P_X,P_Y,t)=x(P_X\cos\Omega t-P_Y\sin\Omega t)+y(P_X\sin\Omega t+P_Y\cos\Omega t)$$

Using the derivatives of the generator function, express the variables $p_x$, $p_y$, X és Y as functions of $x,y,P_X,P_Y$.

b.) Using the relations of a.) express the „old” variables $\{x,y,p_x,p_y\}$ in terms of the new ones $\{X,Y,P_X,P_Y\}$.

c.) Determine the new form of the Hamiltonian $K(X,Y,P_X,P_Y)$. If your calculations are correct, it is time independent.

d.) Show that the new Hamiltonian can be transformed to the form of the original one, i.e.

$$K=\frac{1}{2m}\left(P_X+\frac{eB'}{2}Y\right)^2+\frac{1}{2m}\left(P_Y-\frac{eB'}{2}X\right)^2+\frac{1}{2}m\omega'^2(X^2+Y^2),$$

where B’ and ω’ are the new „effective” magnetic field and oscillator frequencies, respectively. Express these in terms of the Ω angular velocity and the B, e, m and ω quantities.

e.) What should be Ω, if we want the effective magnetic field B’ to vanish? What is the form of the Hamiltonian K in that case, i.e. what is the oscillator frequency ω’?

f.) Solve the equations of motion in the system, where B’=0. We know, that the particle moves on elliptic orbitals. What is the time period of the motion?

g.) If we transform back to the original (inertial-) frame, the axis of the ellipse will rotate by angular velocity Ω. Sketch the trajectory of the particle.

---

**2.) Feladat**

Consider the problem of the vertical motion in a homogeneous gravitational field. The Hamiltonian of the system is

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}+mgx$$

a.) Write down the full (time dependent) Hamilton-Jacobi equation for the system.

b.) Becazse the Hamiltonian does not depend on time explicitly, we can search the function $S(x,t)$ in the form $S(x,t)=S_0(x,E)-E\,t$, where $E$ is a constant. Express the (shortened) Hamilton-Jacobi equation for the function $S_0$.

c.) Solve the equation for $S_0$.

d.) Knowing the function $S(x,E,t)$, determine the canonical transformation that it generates. Express the canonical coordinate $\beta_E$, that is the canonical pair of E.

e.) The particle is initially (t = 0) in the position x = 0 and has momentum $p_0$. Using this information determine the values of $E$ and $\beta_E$.

f.) Express the x(t) solution of the equation of motion.

---

**3.) Feladat**

Consider a one-dimensional harmonic oscillator, whose Lagrangian is

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 .$$

a.) Write down and solve the Lagrangian equations of motion.
b.) Search a solution with boundary conditions $x(0) = 0$ és $x(t_v) = x_v$!
c.) Express the action $S$ for the solution of b.). Denote it by $S(x_v, t_v)$!
d.) Show that the function S solves tha Hamilton-Jacobi equation of the system!
e.) What is $\frac{\partial S}{\partial t_v}$?

---

**4.) Feladat**

The Schrödinger equation of a particle moving in the one-dimensional potential $V(x)$ is the following

$$i\hbar \partial_t \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

It is maybe useful to search the solution in the form $\psi(x,t) = A(x,t) e^{\frac{i}{\hbar} S(x,t)}$.

a.) Put the form $\psi(x,t) = A(x,t) e^{\frac{i}{\hbar} S(x,t)}$ in the equation.
b.) Collect the terms according to the powers of $\hbar$.
c.) If $\hbar$ is small enough then it is sufficient to use the zeroth order term only. What equation you get in that case?
d.) When is $\hbar$ "small enough"?

**1.) Feladat**

Egy kétdimenziós, elektromosan töltött izotrop harmonikus oszcillátort a rezgési síkjára merőleges irányú homogén B indukciójú mágneses térbe helyeztünk. A rendszer Hamilton-függvénye (az ún. szimmetrikus mértékben felírva) az alábbi:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{eB}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eB}{2}x\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

A feladatban egy elsőre furcsa, de elegáns megoldást adunk a problémára. A megoldás azon az észrevételen alapul, hogy egy forgó koordinátarendszerben a Coriolis-erő éppen olyan alakú, mint egy homogén mágneses tér hatása, ezért azt várjuk, hogy esetünkben áttérve megfelelő szögsebességgel forgó koordinátarendszerbe a mágneses tér hatását kitranszformálhatjuk, és így egy egyszerű izotrop harmonikus oszcillátort nyerünk.

a.) Tekintse az alábbi alkotófüggvényt, és mutassa meg, hogy ez valóban a forgó koordináta rendszerbe visz.
$W_2(x, y, P_X, P_Y, t) = x\left(P_X \cos\Omega t - P_Y \sin\Omega t\right) + y\left(P_X \sin\Omega t + P_Y \cos\Omega t\right)$
Az alkotófüggvény megfelelő deriváltjainak segítségével fejezze ki a $p_x$, $p_y$, X és Y változókat az $x,y,P_X,P_Y$ és t függvényében!

b.) Adja meg a a.)-ban szereplő összefüggések segítségével fejezze ki a régi $\{x,y,p_x,p_y\}$ koordinátákat az újak ($\{X,Y,P_X,P_Y\}$) függvényében!

c.) Adja meg a $K(X,Y,P_X,P_Y)$ új Hamilton-függvényt! Ha jól számolt ez időfüggetlen lesz.

d.) Mutassa meg, hogy az új K Hamilton-függvény az eredetinek megfelelő alakra hozható, azaz
$$K = \frac{1}{2m}\left(P_X + \frac{eB'}{2}Y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(P_Y - \frac{eB'}{2}X\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega'^2\left(X^2 + Y^2\right),$$
ahol B' és ω' az új „effektív" mágneses tér és körfrekvencia. Fejezze ki ezeket a forgó koordinátarendszer Ω szögsebességének, valamint a B, e, m és ω függvényeként.

e.) Mekkorának válasszuk az Ω szögsebességet, hogy a B' effektív mágneses térerősség zérussá váljon? Hogyan néz ki ekkor a K Hamilton-függvény, azaz mekkora az ω' effektív körfrekvencia?

f.) Oldjuk meg a mozgásegyenleteket abban a forgó rendszerben, ahol a B' effektív térerősség zérus! Tudjuk, hogy itt a részecske ellipszis pályákon keringhet. Mennyi a keringési idő?

g.) Láthatjuk, ha visszatérünk az eredeti *x,y* koordinátarendszerbe, az ellipszis pálya nagytengelye Ω szögsebességgel forog. Ábrázoljuk a részecske pályáját!

---

**2.) Feladat**

Tekintse a függőleges hajítás problémáját! A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + mgx$$

a.) Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az $S(x, t)$ függvényt
$S(x,t) = S_0(x,E) - E\,t$ alakban, ahol $E$ egy állandó. Milyen egyenletet elégít ki az $S_0$ függvény?

c.) Oldja meg az $S_0$-ra vonatkozó egyenletet!

d.) Az $S(x,E,t)$ függvény ismeretében adja meg az általa, mint alkotófüggvény által generált kanonikus transzformációt, azaz fejezze ki az $E$-hez kanonikusan konjugált $\beta_E$ koordinátát!

e.) A $t = 0$ időpillanatban a vizsgált tömegpont az $x = 0$ pontból indult $p_0$ impulzussal. Ez alapján adja meg az $E$ paraméter értékét, és a $\beta_E$ konstans értékét!

f.) Adja meg a mozgásegyenlet x(t) megoldását!

---

**3.) Feladat**

Tekintsen egy egydimenziós harmonikus oszcillátort, aminek Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

a.) Írja fel a Lagrange-féle mozgásegyenleteket! Adja meg a megoldás általános alakját!
b.) Keressen olyan megoldást, amire $x(0) = 0$ és $x(t_v) = x_v$!
c.) Határozza meg az $S$ hatásfüggvény értékét, amit a b.)-ben kapott megoldás mentén a hatásfunkcionál felvesz! Jelölje ezt $S(x_v, t_v)$!
d.) Mutassa meg, hogy $S$ kielégíti a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!
e.) Mivel egyenlő $\frac{\partial S}{\partial t_v}$?

---

**4.) Feladat**

Egy egydimenziós $V(x)$ potenciálban mozgó részecske időfüggő Schrödinger-egyenlete az alábbi alakú:

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

A hullámfüggvényt érdemes lehet az alábbi alakban keresni: $\psi(x,t) = A(x,t)e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)}$.

a.) Írja be a fenti alakot a Schrödinger egyenletbe!
b.) Válogassa szét a megjelenő tagokat $\hbar$ hatványai szerint.
c.) Amennyiben $\hbar$ elegendően kicsiny, akkor elég benne a nulladrendű tagot tekinteni. Milyen egyenletet kap ekkor?
d.) Mikor elegendően kicsiny $\hbar$?