MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	GYAK 4.

1.) Feladat

Egy intergalaktikus (mindenféle gravitációs vonzócentrumtól távoli) űrállomásról egy rakétahajtás elvén működő űrhajó indul. Az űrhajó kezdeti nyugalmi tömege, üzemanyaggal együtt M_0. A rakéta üzemanyaga a rakétához képest w_0 (szokásos) sebességgel távozik. *(Az w_0 sebességről egyelőre ne tegyünk fel semmit! Lehet akár relativisztikusan nagy is.)*

a.) Üljünk be a rakétával együttmozgó rendszerbe, és tekintsük azt a pillanatot, amikor a rakéta (nyugalmi) tömege M! Egy rövid idő alatt az üzemanyag égéstermékéből dm „nyugalmi tömegnyi” távozott. Írjuk fel a négyesimpulzus megmaradást ebben a rendszerben, és ez alapján adjuk meg a rakéta nyugalmi tömegének megváltozását, ill. a folyamat után a rakéta dv sebességét!

b.) Korábban láttuk, hogy ilyen egydimenziós mozgások során kényelmes lehet a rapiditással számolni. Számítsuk ezért át a rakétával (pillanatnyilag) együttmozgó rendszerben mért dv sebességváltozást $d\theta$ rapiditásra!

c.) Az a.) és b.) feladat eredményei alapján határozzuk meg a rakéta nyugalmi tömegét, és rapiditását amikor már összesen m nyugalmi tömegű égéstermék távozott.

d.) Határozzuk meg a rakéta sebességét a folyamat végén.

e.) Láthatjuk, hogy a rakéta nyugalmi tömege nem m-mel változott. Hogyan értelmezhetjük ezt?

2.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecskét homogén E nagyságú statikus elektromos térbe helyeztünk. A részecske álló helyzetből indul. Írjuk le a részecske mozgását! A részecske induljon az origóból a $t=0$ időpillanatban, a térerősség mutasson az x-tengely irányába!

a.) Adjuk meg először a részecske mozgását nemrelativisztikus közelítésben!

b.) Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!

c.) Oldjuk meg a mozgásegyenletet a részecske impulzusára!

d.) A $p_x(t)$ függvényből fejezzük ki az $v_x(t)$ függvényt!

e.) Rajzoljuk fel az $v_x(t)$ függvényt, és vessük össze a nemrelativisztikus megoldással!

f.) A sebesség integrálásával adjuk meg az $x(t)$ hely-idő függvényt! Rajzoljuk fel ezt is!

3.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecske homogén B mágneses térben mozog a térerősségre merőleges síkban. A részecske (kezdeti) sebessége v_0 nagyságú. Írjuk le a részecske mozgását! A koordinátarendszerünket úgy választottuk meg, hogy a B mágneses indukció mutasson a z irányba, a részecske sebessége pedig kezdetben x irányú.

a.) Oldjuk meg a feladatot nemrelativisztikus közelítésben!

b.) Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!

c.) Felhasználva, hogy a részecske négyesimpulzusának Minkowski-hossza nem változik, mutassuk meg, hogy a részecske (szokásos) sebességének nagysága időben állandó.

d.) Ezt felhasználva írjuk fel a mozgásegyenletet $\frac{d\vec{v}}{dt}$-re!

e.) Vegyük észre, hogy az egyenlet semmivel sem bonyolultabb az a.)-feladatban lévőnél. Oldjuk meg!

f.) A részecske egyenletes körmozgást végez. Adjuk meg a körpálya sugarát és a mozgás periódusidejét! Vessük össze ezeket a nemrelativisztikus eredménnyel!

4.) Feladat

Oldjuk meg az 3.) és 4.) feladatokat áttérve a mozgásegyenlet relativisztikusan kovariáns alakjára!

a.) Írjuk fel a mozgásegyenletet az alábbi alakban,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu{}_\nu u^\nu ,$$

ahol $F^{\mu}{}_{\nu}$ az előadáson bevezetett, az elektromos és mágneses tereket tartalmazó elektromágneses térerősség tenzor. Írjuk fel az egyenleteket a homogén elektromos, ill. mágneses tér esetén!

b.) Ha jól számoltunk, nagyon egyszerű (lineáris) differenciálegyenletrendszert kaptunk. Oldjuk meg! Mik a kezdeti feltételek?

c.) Adjuk meg a kezdeti feltételeknek is megfelelő $u^{\mu}(\tau)$ megoldást!

d.) Integráljuk a kapott megoldást, határozzuk meg $x^{\mu}(\tau)$-t!

e.) A részecske x^0 koordinátája éppen a (vonatkoztatási rendszernek megfelelő) időkoordináta c-szerese. Ezt kihasználva $x^0(\tau)$-ből adjuk meg a $\tau(t)$ függvényt.

f.) Felhasználva az e.) feladat eredményét, adjuk meg a részecske $x^{\mu}(t)$ mozgását!

5.) Feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecske egymásra merőleges homogén B mágneses és E elektromos térben mozog. A részecske kezdetben állt. Írjuk le a részecske mozgását! A koordinátarendszerünket úgy választottuk meg, hogy a B mágneses indukció mutasson a z irányba, az E elektromos tér pedig az y irányba!

a.) Írjuk fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét az 5.) feladatban is látott kovariáns alakban!

Bár az a.)-ben kapott egyenlet már így megoldható lenne, de tanulságosabb más utat követni.

Gondolkodjunk a következőképp: keresztezett elektromos és mágneses térben elképzelhető olyan egyenesvonalú egyenletes mozgás, amikor a mágneses Lorentz-erő és az elektromos tér által kifejtett erő éppen kioltja egymást. Átboostolva az ezzel a sebességgel mozgó rendszerbe az elektromos térerősség biztosan el fog tűnni, hiszen csak így maradhat benne egy töltés nyugalomban.

b.) Mekkora ennek az egyenletes mozgásnak a sebessége? Mikor értelmes fizikailag amit kapunk?

c.) Transzformáljuk át a térerősségtenzort ebbe az egyenletesen mozgó rendszerbe!

d.) Oldjuk meg a mozgást a mozgó rendszerben!

e.) Adjuk meg a részecske $x^{\mu}(t)$ mozgását az eredeti (álló) rendszerben! Vázoljuk a részecske pályáját!

f.) Mi van, ha a b.) feladatban „nem értelmes” sebességet kapunk? Ekkor hogy mozog a részecske?
