

1.) Feladat

Egy részecske az x-tengely mentén szabadon mozoghat, Hamilton-függvénye:

$$H_0(p, x) = \frac{p^2}{2m}$$

- Írjuk fel a rendszer Hamilton-Jacobi-egyenletét, és oldja meg. A továbbiak miatt kényelmes, ha az energia helyett a $\frac{\partial S}{\partial x} = \alpha$ szeparálási konstanszt vezetjük be.
- Adjuk meg az S által generált kanonikus transzformációt!
- Most kapcsoljunk be egy perturbáló potenciált, aminek alakja $H_1(p, x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, azaz

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Transzformálja át a Hamilton-függvényt a b.)-ben kapott transzformációval! Láthatja, hogy ezzel a H_0 tagot eltüntettük, H_1 viszont megmaradt.

- Írja fel az eltranszformált (α, β) változókra a kanonikus mozgásegyenleteket!
- Bár ezeket az egyenleteket most meg tudnánk oldani, azonban most más utat járunk. Állítsuk elő az $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ függvényeket Taylor-sor alakban, iteratíven!

2.) Feladat

Egy anharmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakban áll előttünk:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \left(x^2 + b \frac{x^4}{2} \right)$$

A célunk meghatározni az oszcillátor periódusidejét az energia függvényében.

Induljunk ki a perturbálatlan harmonikus oszcillátorból:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

- Transzformáljon át a H_0 -nak megfelelő hatás-szög változóba, ezeket jelölje I_0 és φ_0 !
- Fejezze ki a teljes H függvényt I_0 és φ_0 segítségével!

Ettől a ponttól kezdve a $H(I_0, \varphi_0)$ függvényből kiindulva a szokásos módon állunk neki a teljes H-nak megfelelő hatás-szög változókkal való számolásnak, azaz:

- Fejezzük ki a teljes ($H=E$) energia segítségével a szintvonalak $I_0(E, \varphi_0)$ egyenletét. Adja meg a függvényt E szerint kifejtett hatványsor alakban! Elegendő az első (esetleg második) nemtriviális tagig számolnia!
- Írjuk fel a teljes H-nak megfelelő $I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi_0 I_0(E, \varphi_0)$ hatásváltozót E szerinti hatványsor alakban!
- Határozzuk meg a mozgás T(E) periódusidejét E szerinti hatványsor alakban!
- Mikor konvergens a d.)-ben szereplő hatványsor? Értelmezzük az eredményt!