
1.) Feladat

Tekintsük az alábbi, α>0 kitevőjű hatványfüggvény szerint változó potenciálban mozgó részecske esetét:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}+k\,|\,x\,|^{\alpha}$$

a.) Rajzoljuk fel a p-x síkra a H(p,x) = E szintvonalakat.

b.) Adjuk meg a szintvonalak által közrefogott „fázis-területet” meghatározó integrált! Ezt jelöljük $2\pi I$ -vel!

c.) Az integrált általában nem tudjuk egzaktul elvégezni, de érdekes kérdés lehet az E, m, és k paraméterektől való függés meghatározása. Megfelelő változócserével dimenziótlanítsuk az integrált, azaz érjük el, hogy a paraméterektől való függés kerüljön az integrál elé. Az integrál értéke ekkor csupán egy szám, numerikusan könnyen meghatározható.

d.) Az I(E) függvény deriválásával fejezzük ki a rezgés periódusidejét!

2.) Feladat

Két tömegpont az x tengely mentén mozoghat egy dobozban. A tömegpontokat külön-külön D rugóállandójú rugóval a falhoz kötöttük, és közéjük is egy D állandójú rugót tettünk. A rendszert leíró Hamilton-függvény:

$$D=\frac{1}{2m}p_1^{\,2}+\frac{1}{2m}p_2^{\,2}+\frac{1}{2}Dx_1^2+\frac{1}{2}Dx_2^2+\frac{1}{2}D(x_2-x_1)^2$$

a.) Írjuk fel a rendszer időfüggetlen (rövidített) Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Láthatóan az egyenlet az x_1 és x_2 koordinátákban nem szeparálható. Térjünk át az $X=\frac{x_1+x_2}{2}$ és $Y=x_2-x_1$ változókra. Mutassuk meg, hogy most már szeparálható a Hamilton-Jacobi egyenlet!

c.) A megjelenő két konstans (E és α) rögzítése mellett határozzuk meg az X-hez és Y-hoz kanonikusan konjugált impulzust, azaz a $P_X(X,E,\alpha)$ és $P_Y(Y,E,\alpha)$ függvényeket! Mutassuk meg, hogy ezek az X-P_X és Y-P_Y síkon ellipszisek!

d.) Határozzuk meg az I_X és I_Y hatásváltozók értékét E és α függvényében!

e.) Invertáljuk az összefüggést, fejezzük ki az E és α konstansokat I_X és I_Y függvényében!

f.) Határozzuk meg a rendszer rezgési frekvenciáit! Periodikus-e (tetszőleges kezdőfeltétel esetén) a rendszer mozgása?

3.) Feladat

Tekintsük a Kepler-problémát, melynek Hamilton-függvénye

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

a.) Írjuk fel a rendszer rövidített Hamilton-Jacobi-egyenletét, és lássuk be, hogy r és φ szerint szeparálható!

b.) Adjuk meg a φ-hez tartozó I_φ hatásváltozót! Mi ez?

c.) Adjuk meg az r-hez tartozó I_r hatásváltozót meghatározó integrált! Adjuk meg az integrálási határokat!

d.) Térjünk át az $u = 1/r$ változóra! Terjesszük ki az integrandust a komplex síkra! Hol van pólusa/szakadása a függvénynek?

e.) Az integrálási kontúr megfelelő transzformálásával végezzük el az integrált!

f.) Az e.)-ben kapott eredmény átalakításával adjuk meg az $H(I_r,I_\varphi)$ Hamilton-függvényt! Ennek deriváltjaival számítsuk ki az I_r -hez és I_φ-hez tartozó frekvenciákat! Periodikus-e a mozgás?

g.) Mutassuk meg, hogy Kepler 3. törvénye teljesül, azaz a keringési idő négyzete arányos az ellipszis nagytengelyének ($a = r_{min} + r_{max}$) a köbével!

4.) Feladat

A hamiltoni mechanika egy igen szép tétele a hatásváltozó „adiabatikus invarianciája". A tétel (amit itt nem bizonyítunk, a bizonyításért lásd [1,2]) kimondja, hogy amennyiben egy egy szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye függ az időtől, de az időfüggés lassú, úgy a rendszer úgy mozog, hogy a korábban bevezetett I hatásváltozó időben állandó.

A tétel értelmezését megkönnyíti, ha feltesszük, hogy a Hamilton-függvényben van valamilyen paraméter, ami lassan változik az idő függvényében, azaz:

$$H = H(p, q, \lambda(t))$$

A hatásváltozót tetszőleges λ paraméterérték mellett definiálhatjuk úgy, hogy rögzítjük λ-t, és ekkor kiszámítjuk egy periódusra a fázistrajektória által körülölelt $2\pi I(\lambda, E) = \oint p(E, q, \lambda) dq$ területet. A tétel azt állítja, hogy ha λ-t elegendően lassan (és simán) változtatjuk egy λ_1 értékről valamilyen λ_2 értékre, úgy I értéke nem változik.

Tekintsünk egy matematikai ingát, ahol az inga szálának hosszát az idő függvényében lassan rövidítjük. A rendszer Hamilton-függvénye kis kitérések esetén:

$$H(p, \varphi, l(t)) = \frac{p^2}{2ml^2(t)} + \frac{1}{2} mgl(t)\varphi^2$$

a.) Adott l ingahossz és E energia esetén írjuk fel az $I(l,E)$ hatásváltozót!

b.) Tegyük fel, hogy az inga kicsiny A (szög-)amplitudójú lenggést végzett, amikor az inga hossza l_0 volt. Ezután lassan rövidítve elérjük, hogy az inga hossza már csak $l_0/2$. Mekkora szögamplitudóval leng most az inga?

[1] H. Goldstein, „*Classical Mechanics*"

[2] Clive G Wells and Stephen T C Siklos, Eur. J. Phys. **28**, 105 (ArXiV:physics/0610084)