MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	GYAK 9.

1.) Feladat

Egy tömegpont az *x-y* síkon mozoghat a *V(x,y)* potenciális energiával jellemzett konzervatív erőtérben.

a.) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét majd ebből vezesse le a Hamilton függvényt, mint p_x, p_y, x és y függvényét!

b.) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét úgy, hogy a tömegpont helyzetét az r és φ síkbeli polárkoordinátákkal írjuk le. ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$)

c.) Vezesse le a rendszer Hamilton-függvényét mint p_r, p_φ, r és φ függvényét! Mutassa meg, hogy az új (K-val jelölt) Hamilton függvény egyenlő a régi H-val, csak benne változócserét kell végrehajtani.

d.) Fejezze ki az x és y Déscartes koordinátákhoz rendelt p_x és p_y kanonikus impulzusokat p_r, p_φ, r és φ segítségével!

e.) Mutassa meg, hogy az $\{x,y,p_x,p_y\}$ változók közötti kanonikus Poisson-zárójelek nem változnak, ha azokat a polár-koordinátarendszer kanonikus koordinátáival és impulzusaival számítjuk ki!

f.) Mutassa meg, hogy centrális potenciál ($V=V(r)$) esetén a p_φ időállandó!

2.) Feladat

Egy tömegpont az *x-y* síkon mozoghat a *V(x,y)* potenciális energiával jellemzett konzervatív erőtérben.

a.) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét majd ebből vezesse le a Hamilton függvényt, mint p_x, p_y, x és y függvényét!

b.) Át szeretnénk térni forgó koordinátarendszerbe, azaz a következő változókra:

$$x(t) = X(t)\cos(\omega t) - Y(t)\sin(\omega t)$$

$$y(t) = X(t)\sin(\omega t) + Y(t)\cos(\omega t)$$

Írja fel a Lagrange-függvényt az X és Y változókban!

c.) Határozzuk meg az új K Hamilton függvényt az X,Y,P_X és P_Y függvényében! Hogy viszonyul ez az álló koordinátarendszer-beli koordinátákkal kifejezett Hamilton-függvényhez?

d.) Mutassa meg, hogy az $\{x,y,p_x,p_y\}$változók közötti kanonikus Poisson-zárójelek nem változnak, ha az új $\{X,Y,P_X, P_Y\}$ kanonikus változók szerint fejezzük ki őket.

3.) Feladat

A {q,p} kanonikus koordináta és impulzus kettősét az előadáshoz hasonlóan jelölje az $\underline{\eta}$ vektor. Tekintse az alábbi transzformációt:

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \\ q\cot p \end{pmatrix}$$

a.) Fejezze ki az $M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$ Jacobi mátrixot!

b.) Mutassa meg, hogy a fenti transzformáció invariánsan hagyja a J_{ij} mátrixszal leírt szimplektikus struktúrát:

$$M_{ik}J_{kl}M_{jl} = J_{ij},$$

ahol

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

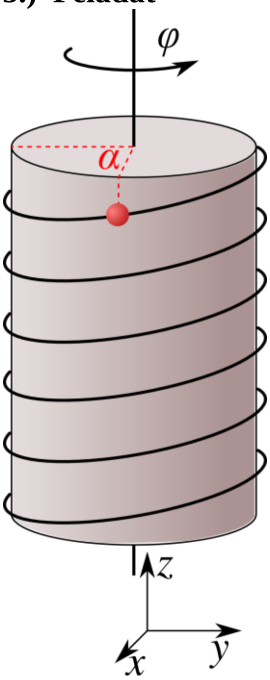
4.) Feladat

Az előadáson szerepelt a Poisson zárójelek néhány tulajdonsága:

- *[F,G] = - [G,F]*
- *[F,a G + b D] = a [F,G] + b [F,D]*, ahol *a,b* valós számok
- *[F, G D] = G [F,D] + [F,G] D*
- Jacobi azonosság: *[A, [B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]]* = 0

Ezek közül az első három bizonyítása triviális, a Jacobi azonosság azonban igen komplikált. Használjuk a szimplektikus mátrixos jelölést, és bizonyítsuk a Jacobi azonosságot! Használjuk ki a J szimplektikus mátrix antiszimmetrikus voltát!

5.) Feladat



Egy kör alapú hengerre egy spirál alakú drótpályát csévéltünk, amin egy m tömegű gyöngyszem súrlódás nélkül mozoghat. A henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére Θ, és a tengely körül könnyen (súrlódás nélkül) elfordulhat. A rendszer helyzetét a henger φ elfordulásával és a gyöngyszem α helyzetével írjuk le. A gyöngyszemre hat a külső gravitációs erőtér is.

A gyöngyszem x,y,z koordinátáit a két szöggel az alábbi módon tudjuk kifejezni:

$$x = R\sin\alpha$$

$$y = -R\cos\alpha,$$

$$z = C(\alpha - \varphi)$$

Ahol C jelöli a spirál menetemelkedését.

a.) Konstruálja meg a rendszer Lagrange-függvényét!

b.) Fejezze ki a p_α és p_φ kanonikus impulzusokat!

c.) A B19 házi feladatban Noether tétel segítségével megmutattuk, hogy a rendszer impulzusmomentuma mozgásállandó:

$$L = mR^2\dot{\alpha} + \Theta\dot{\varphi}$$

Fejezze ki az impulzusmomentumot a p_α és p_φ kanonikus impulzusok segítségével!

d.) Előadáson szerepelt, hogy a mozgásállandók szimmetriatranszformációkat generálnak. Milyen transzformációt generál L?

6.) Feladat

Egy izotrop harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

a.) A B20 feladatban megmutattuk, hogy az alábbi 2x2-es szimmetrikus mátrix elemei megmaradó mennyiségek:

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}\left(p_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j\right)$$

Ismételjük meg a HF számításait, mutassuk meg, hogy valóban megmaradó mennyiségekről van szó!

b.) Milyen szimmetria transzformációkat generálnak az egyes mátrixelemek?

c.) Vezessük be az alábbi mennyiségeket:

$$S_1 = \frac{A_{12}}{\omega}, \quad S_2 = \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega}, \quad S_3 = \frac{L}{2} = \frac{1}{2}(xp_y - yp_x)$$

Mutassuk meg, hogy $[S_i,S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k$.

d.) Mutassuk meg, hogy $H = 4\,\omega^2\,(S_1^2+S_2^2+S_3^2)$