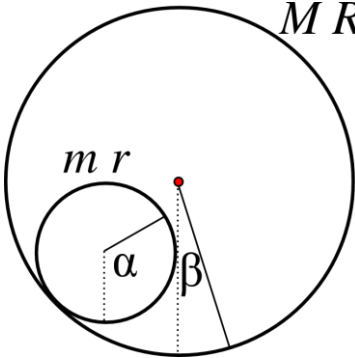


1.) Feladat

Homogén, z irányú B mágneses indukciójú térben m tömegű e töltésű részecske mozog. A gravitációs tér és a $\Phi(\mathbf{r})$ elektromos potenciál nulla. A mágneses vektorpotenciált $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ -nak választottuk (Landau-mérték).

- Írjuk fel a részecske Lagrange-függvényét!
- Mutassuk meg, hogy az $x' = x, y' = y, z' = z + s$ leképezés a Lagrange függvény szimmetriája. A Noether tétel alapján adjuk meg a megfelelő megmaradó mennyiséget!
- Mutassuk meg, hogy az $x' = x, y' = y + s, z' = z$ is szimmetria! Mi a megfelelő megmaradó mennyiség?
- Tekintsük a $x' = x + s, y' = y, z' = z$ transzformációt. Ez láthatóan nem hagyja invariánsan a Lagrange függvényt. Mutassuk meg, hogy a Lagrange-függvény megváltozása ebben az esetben egy teljes időderivált, tehát általánosabban véve ez is szimmetria.
- Konstruáljuk meg a d.)-feladatban szereplő transzformációhoz tartozó megmaradó mennyiséget! (Ehhez ki kell egészítenünk a Noether-tétel előadáson szereplő levezetését!)

2.) Feladat



Egy M tömegű R sugarú belül üreges gyűrű könnyen elfordulhat a tengelye körül. Benne belül egy m tömegű r sugarú gyűrű jól tapadva gördülhet. A mechanikai rendszer helyzetét az α és β szögelfordulásokkal jellemezzük, a rendszerre hat a függőleges g gravitációs tér is.

- Konstruáljuk meg a rendszer Lagrange-függvényét! Mutassuk meg, hogy

$$L = mr^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (m + M) R^2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 - mrR \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} + mg(R - r) \cos \left(\frac{r\alpha - R\beta}{R - r} \right) + const.$$

- Mutassuk meg, hogy az $\alpha' = \alpha + \phi, \beta' = \beta + \phi r/R$ transzformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt! Milyen elmozdulást ír le ez a transzformáció?
- Adjuk meg a b.) feladat szimmetriájából következő Noether-féle megmaradó mennyiséget!
- Adjuk meg a rendszer Lagrange-féle mozgásegyenleteit! Mutassuk meg közvetlen számolással, hogy a c.)-ben kapott mennyiség megmarad!

3.) Feladat

Egy tömegpont centrális erőterben mozoghat. Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

- Írja fel a tömegpont impulzusmomentumának L_x, L_y és L_z komponensét a \mathbf{p} kanonikus impulzusvektor és \mathbf{r} helyvektor komponenseinek segítségével!
- Számítsa ki az $[L_x, x]$ és $[L_x, y]$ Poisson zárójeleket, valamint az $[L_x, p_x]$ és $[L_x, p_y]$ Poisson-zárójeleket!
- A b.) feladat eredményeit általánosítva számítsa ki az $[L_i, r_j]$ és $[L_i, p_j]$ Poisson-zárójeleket tetszőleges $i-j$ indexpárra!
- Számítsa ki az $[L_i, L_j]$ Poisson-zárójelet tetszőleges $i-j$ indexpárra!
- Számítsa ki az $[L_i, H]$ Poisson-zárójelet tetszőleges i -re! Mit mond ez számunkra az impulzusmomentumról?

4.) Feladat

Tekintsük a Kepler-problémát, aminek Lagrange-függvénye

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}.$$

- a.) Tekintse az alábbi vektort (a neve Runge-Lenz vektor):
 $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m \alpha \mathbf{e}_r.$
 Fejzze ki ezen vektor komponenseit úgy, hogy benne csak a kanonikus hely és impulzus komponensek szerepeljenek!
 - b.) Számítsa ki az $[A_i, H]$ Poisson-zárójelet! Mit mondhatunk ez alapján az \mathbf{A} vektorról?
 - c.) Az \mathbf{A} vektor megmaradását kihasználva fejezzük ki (a mechanika 1 tárgyon látott effektív potenciálos módszernél sokkal egyszerűbben) a keringő bolygó pályáját!
 Ehhez tekintsünk egy olyan ahol a pálya síkja az x - y sík, és az \mathbf{A} vektor mutasson az x irányba. Fejezzük ki az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ skaláris szorzatot az (r, ϕ) polárkoordináták segítségével, majd rendezzük megfelelően a kapott kifejezést és olvassuk le a pályát!
 - d.) Milyen irányba mutat az \mathbf{A} vektor? Mit fejez ki a hossza?
-

5.) Feladat

Tekintsünk egy e töltésű m tömegű részecskét, ami az $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ -el és $\Phi(\mathbf{r})$ -el jellemzett elektromágneses térben mozog.

- a.) Adjuk meg a részecske Hamilton függvényét!
- b.) Szokás bevezetni az ún. kinetikus impulzust, ami a részecske tömegének és sebességvektorának szorzata (ez a szokásos impulzus!). Fejezzük ki a kinetikus impulzust a kanonikus impulzus segítségével!
- c.) Számítsuk ki a kinetikus impulzusok Poisson zárójeleit a (kanonikus) koordinátákkal és kanonikus impulzusokkal!