MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	GYAK 7.

1.) Feladat

Az egyik legegyszerűbb nem-kvadratikus térelmélet az ún. Φ^4 elmélet, melynek Lagrange-sűrűsége a tér, idő és a mező megfelelő átskálázása után az alábbi alakot ölti:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \Phi)^2 - \mathcal{V}(\Phi, \partial_x \Phi),$$

ahol a potenciális energia sűrűsége (az ún. szimmetriasértett fázisban) az alábbi alakot ölti:

$$\mathcal{V}(\Phi, \partial_x \Phi) = \frac{1}{2}(\partial_x \Phi)^2 - \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{4}\Phi^4 .$$

Ez az elmélet nem csak az egyszerűsége miatt fontos, de pl. az egytengelyű mágnesek leírásánál is használható.

a.) Írja fel a modell Euler-Lagrange féle mozgásegyenleteit!

b.) Írja fel az energiasűrűség kifejezését a modellben!

c.) Írja fel az energiaáram kifejezését a modellben!

d.) Keressen $\Phi(x,t) = const.$ időben és térben konstans konfigurációkat, amik megoldják a mozgásegyenleteket. Mekkora ezek energiasűrűsége?

e.) Most tekintsen időben állandó, de térben változó stacionárius $\Phi(x)$ megoldásokat. Milyen egyenletet kell ezeknek kielégíteni?

f.) Szeretnénk olyan megoldást kapni, amely az d.) feladat egyik konstans értékéből átvisz a másikba, azaz $\Phi(x \to -\infty) = \Phi_1$ és $\Phi(x \to +\infty) = \Phi_2$. (Ez egy ún. doménfal megoldás.) Mutassa meg, hogy az alábbi kifejezés jó megoldás:

$$\Phi(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

g.) A mozgó doménfal megoldás az alábbi alakba írható:

$$\Phi(x,t) = \tanh\left(\frac{x - vt}{\sqrt{2}\sqrt{1-v^2}}\right)$$

Mutassa meg, hogy ez valóban megoldja a mozgásegyenleteket!

h.) Írja fel az energiasűrűséget a g.)-ben szereplő mozgó doménfalra a t = 0 időpontban! Ábrázolja!

i.) Írja fel az energiaáramot a g.)-ben szereplő mozgó doménfalra a t = 0 időpontban! Ábrázolja!

--**2.) Feladat**

Egy egytengelyű ferromágneses spinlánc energiasűrűségét az alábbi kifejezéssel próbáljuk megadni:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_x \mathbf{M}) \cdot (\partial_x \mathbf{M}) - \frac{\lambda}{2} M_z^2 ,$$

ahol az első tag azt írja le, hogy a kis elemi dipólusok a közeli szomszédjaikkal párhuzamosan szeretnének beállni, a második tag pedig azt, hogy a dipólusok preferálják a $\pm$z irányú beállást. Az elemi dipólusok hossza adott, megfelelő skálázással elérhető, hogy $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = 1$ legyen. Ezt a kényszert figyelembe vehetnénk Lagrange-multiplikátorral, azonban most más utat járunk.

a.) Paraméterezze a mágnesezettséget gömbi polár koordinátákkal, azaz legyen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}!$$

Írja fel az energiasűrűség kifejezését a ϑ és φ mezők segítségével!

b.) Az energiasűrűség integráljának variálásával vezesse le a lánc egyensúlyi konfigurációit meghatározó egyenletet!

c.) Keressen konstans megoldásokat! Hányat talál? Milyen ezek stabilitása?

d.) Keressen olyan (legkisebb energiájú) megoldást ami az egyik stabil konstans értékből átvisz a másik stabil konstans értékbe (doménfal).