MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz) | **GYAK 5.**

1.) Feladat

Az előző gyakorlaton láttuk, hogy egy gyengén meghajlított rúd $\chi(z)$ alakját meghatározó egyenlet az alábbi alakba írható:

$$E\Theta\frac{d^2\chi}{dz^2}=M(z),$$

ahol $M(z)$ a rúdban ébredő hajlítónyomaték. Ez az egyenlet ebben a formában azonban csak akkor használható, ha valahonnan tudjuk az $M(z)$ hajlítónyomatékot. Ez csak akkor van így, ha az elrendezés statikailag nem túlhatározott, azaz a rúd globális egyensúlyi egyenletei minden tartóerőt egyértelműen meghatároznak. Statikailag túlhatározott esetben (pl. háromtámaszú tartó) nem tudjuk az $M(z)$ függvényt.

Tekintsünk egy rudat, amire függőlegesen a $p(z)$ lineáris erősűrűséggel jellemzett (ún. elosztott) terhelés hat. Ezt úgy kell értelmezni, hogy egy dz hosszúságú darabra $dF = p(z)dz$ erő hat.

a.) Mutassuk meg, hogy a hajlítónyomatékra teljesül a következő egyenlet:

$$\frac{d^2M}{dz^2}=p(z)$$

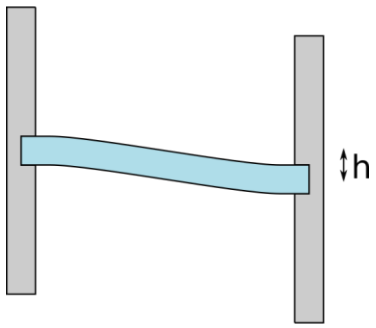
b.) Ez alapján mutassuk meg, hogy a rúd alakját az alábbi (negyedrendű) differenciálegyenlet határozza meg:

$$E\Theta\frac{d^4\chi}{dz^4}=p(z)$$

c.) Tekintsük a könnyű (elhanyagolható tömegű), végén F erővel terhelt rúd problémáját! (HF4 B11 feladat) Oldjuk meg ennek az egyenletnek a segítségével! Mik a peremfeltételek?

d.) Tekintsük az önsúlyától lehajló rúd problémáját (GYAK4 5. feladat) Oldjuk meg az új módszerrel az egyenleteket. Itt mik a peremfeltételek?

2.) Feladat



Egy keskeny, könnyű, L hosszúságú rúd két végét belefúrtuk egy-egy lemezbe, majd a két lemezt egymáshoz képest elnyírtuk a függőleges. x irányban h távolsággal. A rúd keresztmetszti tényezője Θ, Young-modulusa E, tömege elhanyagolható.

a.) Írjuk fel a rúd alakját meghatározó negyedrendű differenciálegyenletet!

b.) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

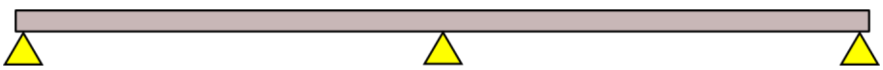
c.) Írjuk fel a rúd végpontjainál érvényes peremfeltételeket!

d.) Adjuk meg a rúd alakját a peremfeltételek figyelembevételével!

e.) Adjuk meg az $M(z)$ hajlítónyomatékot a rúd minden pontjában! Rajzoljuk fel!

f.) Mekkora erők és nyomatékok ébrednek a rúd végpontjain, a furatoknál?

3.) Feladat



Egy $2L$ hosszúságú pallót a két végén és a közepén is alátámasztottunk. A palló végpontjai legyenek a $z=\pm L$ helyeken. A három alátámasztási pont ugyanazon magasságban ($x = 0$) van. A palló lineáris sűrűsége ρ, Young-modulusa E, keresztmetszeti tényezője Θ.

a.) Írjuk fel a palló alakját meghatározó differenciálegyenletet!

b.) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását mind a $z > 0$, mind a $z < 0$ tartományon.

c.) Adjuk meg a végpontoknál érvényes peremfeltételeket, és a $z = 0$ alátámasztásnál érvényes „illeszkedési" feltételeket!

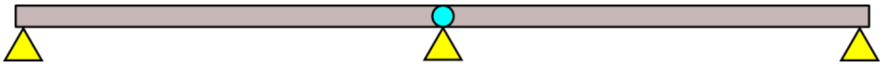
d.) Írjuk fel a palló $\chi(z)$ alakját! Rajzoljuk fel!

e.) Adjuk meg a pallóban ébredő $M(z)$ hajlító nyomatékot, és rajzoljuk fel!

f.) Mekkora tartóerők ébrédnek az alátámasztásoknál?

g.) Az egyik munkás nem figyelt oda, ezért a középső alátámasztást h-val magasabbra építette. Adjuk meg a palló alakját és a tartóerőket ebben az esetben!

4.) Feladat



Az előző feladatban láthattuk, hogy a rúd alakjának meghatározásához egy (viszonylag) komplikált peremértékfeladatot kell megoldanunk. Mérnöki szempontból ez még nem is lenne akkora probléma, azonban azt is láttuk, hogy az alátámasztási pontok elmozdítására a tartóerők értékei nagyon érzékenyek.
A mérnökök ezt a problémát úgy oldják meg, hogy (akár a szerkezet gyengítése árán) könnyen elforduló csuklókat építenek a szerkezetbe. Egy ilyen csuklónál a hajlítónyomaték szükségszerűen zérus.
Tekintsük az előző feladatot, de most a középső tartópillér tetejénél építsünk be egy könnyen elforduló csuklót, ahogy az ábra is mutatja.

a.) A rendszer globális egyensúlyi egyenleteiből adjuk meg a tartóerőket!

b.) Adjuk meg az $M(z)$ hajlítónyomatékot!

c.) Adjuk meg a palló $\chi(z)$ alakját, rajzoljuk fel és vessük össze az előző feladatban kapottal!

d.) Megváltoznak-e a tartóerők, ha a középső alátámasztást (nem túl nagy) h magassággal feljebb emeljük?

Ezt a feladatot is meg lehet oldani az 1.) feladatban bevezetett általánosabb módszerrel. Oldjuk meg!

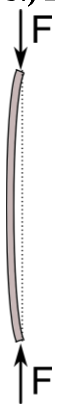
e.) Írjuk fel a palló alakját meghatározó differenciálegyenletet!

f.) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását mind a $z > 0$, mind a $z < 0$ tartományon.

h.) Adjuk meg a végpontoknál érvényes peremfeltételeket, és a $z = 0$ alátámasztásnál érvényes „illeszkedési” feltételeket! Miben térnek ezek el a 3.) feladatától?

g.) Írjuk fel a palló $\chi(z)$ alakját!

5.) Feladat



Egy L hosszúságú könnyű vonalzót a két végén F erővel elkezdünk összenyomni. Azt tapasztaljuk, hogy amíg az F erő nem túl nagy, addig a vonalzó egyenes marad, majd egy kritikus erőnél hirtelen kihasasodik. (Ha nem vigyázunk, könnyen el is törhetjük a vonalzót.) Ezt a jelenséget hívják Euler-féle kihajlásnak, vagy Euler-instabilitásnak.
Először tekintsük azt az esetet, amikor a vonalzó végei elfordulhatnak, azaz a rendszer nem statikailag túlhatározott.

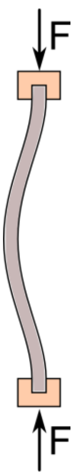
a.) Feltéve, hogy ismerjük a vonalzó $\chi(z)$ alakját, adjuk meg a vonalzóban ébredő $M(z)$ hajlítónyomatékot!

b.) Írjuk fel a vonalzó alakját meghatározó differenciálegyenletet!

c.) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

d.) Adjuk meg a peremfeltételeket!

e.) Mekkora F_c kritikus erőnél hasasodik ki a vonalzó?



Most tekintsük azt az esetet amikor a vonalzó végeit erősen megfogva nem engedjük, hogy a végei elforduljanak! Ekkor a rendszer túlhatározott, ezért nem tudjuk könnyen felírni a hajlítónyomatékot, azonban könnyen fel tudjuk írni a nyomaték második deriváltját.

f.) Feltéve, hogy ismerjük a vonalzó $\chi(z)$ alakját, adjuk meg a hajlítónyomaték $\dfrac{d^2M}{dz^2}$ második deriváltját!

g.) Írjuk fel a vonalzó alakját meghatározó (negyedrendű) differenciálegyenletet!

h.) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

i.) Adjuk meg a peremfeltételeket!

j.) Mekkora ebben az esetben a kritikus F_c erő?