

### 1.) Feladat

Egy részecske az x tengely mentén szabadon mozoghat, Hamilton függvénye:

$$H_0(p, x) = \frac{p^2}{2m}$$

a.) Írjuk fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét, és oldja meg. A továbbiak miatt kényelmes, ha az energia helyett a  $\frac{\partial S}{\partial x} = \alpha$  szeparálási konstanszt vezetjük be.

b.) Adjuk meg az S által generált kanonikus transzformációt!

c.) Most kapcsoljunk be egy perturbáló potenciált, aminek alakja  $H_1(p, x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ , azaz

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Transzformálja át a Hamilton-függvényt a b.)-ben kapott transzformációval! Láthatja, hogy ezzel a  $H_0$  tagot eltüntettük,  $H_1$  viszont megmaradt.

d.) Írja fel az eltranszformált ( $\alpha, \beta$ ) változókra a kanonikus mozgásegyenleteket!

e.) Bár ezeket az egyenleteket most meg tudnánk oldani, azonban most más utat járunk. Állítsuk elő az  $\alpha(t)$  és  $\beta(t)$  függvényeket Taylor sor alakban, iteratívén!

### 2.) Feladat

Egy anharmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakban áll előttünk:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \left( x^2 + b \frac{x^4}{2} \right)$$

A célunk meghatározni az oszcillátor periódusidejét az energia függvényében.

Induljunk ki a perturbálatlan harmonikus oszcillátorból:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

a.) Transzformáljon át a  $H_0$ -nak megfelelő hatás-szög változóba, ezeket jelölje  $I_0$  és  $\varphi_0$ !

b.) Fejezze ki a teljes H függvényt  $I_0$  és  $\varphi_0$  segítségével!

Ettől a ponttól kezdve a  $H(I_0, \varphi_0)$  függvényből kiindulva a szokásos módon állunk neki a teljes H-nak megfelelő hatás-szög változókkal való számolásnak, azaz:

c.) Fejezzük ki a teljes ( $H=E$ ) energia segítségével a szintvonalak  $I_0(E, \varphi_0)$  egyenletét. Adja meg a függvényt E szerint kifejtett hatványsor alakban! Elegendő az első (esetleg második) nemtriviális tagig számolnia!

d.) Írjuk fel a teljes H-nak megfelelő  $I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi_0 I_0(E, \varphi_0)$  hatásváltozót E szerinti hatványsor alakban!

e.) Határozzuk meg a mozgás T(E) periódusidejét E szerinti hatványsor alakban!

f.) Mikor konvergens a d.)-ben szereplő hatványsor? Értelmezzük az eredményt!